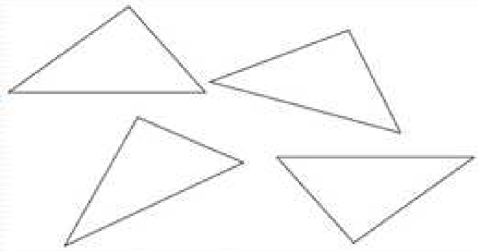
Les solucions

Tenim quatre triangles iguals, cadacun d'ells de costats 12 cm, 9 cm i 7 cm.

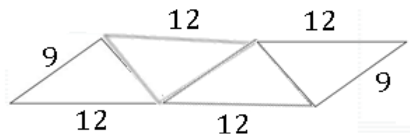
Amb aquests quatre triangles, amb moviments de rotació adequats i adossant-los un a un altre per un costat, podem construir diversos paral·lelograms.

Quin és el màxim perímetre que podem aconseguir per a un d'aquests paral·lelograms?



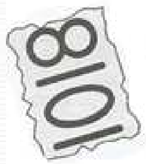
Per a aconseguir el màxim perímetre haurem de procurar que en tots quatre triangles el costat de 12 quedi "a l'exterior" i que a més hi quedin dos costats de 9; així formen el perímetre els sis costats més llargs que és possible. I es pot aconseguir:

El perímetre del paral·lelogram és, doncs, 36 cm.



En una determinada contrada els nombres de telèfon tenen sis xifres i tots comencen amb les xifres 81
La Maria troba un tros de paper on es veu una part del número de telèfon de la Sara. És aquest:

Quantes possibilitats diferents hi ha per al número de telèfon de la Sara?



Ens hem d'adonar que el 8, el 0 i l'1 es veuen igual del dret o del revés i des de la dreta o des de l'esquerra. També hem de reflexionar que l'enunciat no diu que el 81 que es veu sigui justament el del principi. Hi ha aquestes possibilitats:

En el primer cas hi ha 100 possibilitats (tantes com nombres del 00 al 99); el segon i el tercer cas afegeixen dues possibilitats més; el quart cas no afegeix cap possibilitat perquè ja les tenim comptades en el primer cas.   La resposta és. doncs, 102 possibilitats

---

Passa T=36 del problema 5

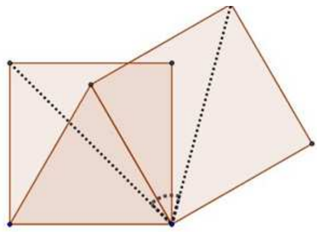
En Joan baixa cada dia per una escala mecànica. Dilluns l'escala funcionava normalment i va trigar 60 segons en la baixada, quiet en el seu escaló. Dimarts l'escala no funcionava i va baixar corrents; va trigar T segons. Avui tenia molta pressa i, tot i que l'escala funcionava, hi ha baixat corrents al mateix ritme (i no ha caigut!). Quants segons haurà trigat avui en la baixada?

Si només ens interessa trobar ràpidament la solució podem imaginar que l'escala té, per exemple, 360 esglaons. Aleshores el primer dia baixa 6 esglaons cada segon i el segon dia baixa 10 esglaons cada segon. El tercer dia se sumaran les dues velocitats: baixarà 16 esglaons cada segon i per completar l'escala trigarà 360/16 = 22,5 segons.
La mateixa idea ens permet raonar-ho en general si posem que hi ha x escalons en comptes de 360. La suma de velocitats (esglaons/segon) serà $\frac{x}{60}+\frac{x}{36}=\frac{16x}{360}=\frac{2x}{45}$ i trigarà $\frac{x}{\frac{2x}{45}}=22{,}5$ segons.

En la figura es veuen dos quadrats i un triangle equilàter.

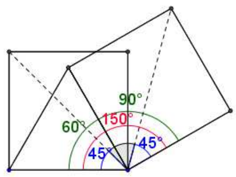
Quina és la mesura, en graus,

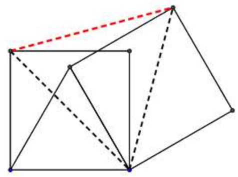
de l'angle determinat per les línies de punts?



Algú ens va dir "es pot dibuixar i mesurar" i certament això es pot fer (fins i tot dibuixar amb el GeoGebra) en un concurs telemàtic. O bé "mesurar diirectament" perquè el dibuix està fet correctament. En aquest sentit convé comentar que en el Cangur no sempre els dibuixos són del tot consistents amb l'enunciat, però com que aquest parla de quadrats i un triangle equilàter amb el mateix costat forçosament "s'ha de dibuixar bé".

És ràpid veure una diferència d'angles (150º - 45º - 45º) que es mostra en la primera figura i que ens dóna 60º , la resposta correcta.





Hem volgut posar la segona figura perquè si algú diu: "ja es veu que si afegim l'altra línia de punts es forma un triangle equilàter" s'ha d'anar amb compte perquè de vegades la vista enganya. Si es preguntés la longitud de la línia de punts vermella la manera més ràpida de demostrar que és igual a la diagonal del quadrat seria, justament, veure que l'angle que es pregunta en el problema és de 60º i després sí que ja podem dir que el triangle "de punts" és equilàter.

L'Ariadna ha agafat diners, uns quants euros i uns quants cèntims, (però en total menys de 200 €), per anar a la "*setmana emporteu-vos-ho tot a bon preu!*". Ha comprat dues coses i en cada compra (com fa molta gent) ha pagat en euros i li han tornat el canvi en cèntims. El total del que ha gastat en les dues compres (que és el que ens interessa) és justament la meitat del que portava. Quan arriba a casa se n'adona que la quantitat d'euros que li queden és igual al nombre de cèntims que havia agafat i la quantitat de cèntims que li queden és igual al nombre inicial d'euros. Quant s'ha gastat en total en les dues compres?

Per a la solució "formal" el quíd és respondre a la pregunta: si tenim unes quantitats de x euros i y cèntims, quants diners tenim? $x + \frac{y}{100}$, és clar. Si pensem que aquestes són les quantitats inicials, l'enunciat queda així: $x + \frac{y}{100} = 2(y + \frac{x}{100})$. Operem i simplifiquem i trobem $98x = 199y$. Aleshores hem de pensar quines són les solucions d'aquesta equació que són nombres enters. La més petita $x = 199, y = 98$ perquè 199 i 98 sòn primers entre ells (per pensar ràpid en quina serà la solució va bé analitzar abans l'equació $3x = 5y$, per exemple). Per tant ha sortit de casa amb 199 euros i 98 cèntims i hi torna amb 98 euros i 199 cèntims = 99,99 €. Afegirem dos comentaris:

- Per què es parla de dues compres? (tot i que ja s'insistia a bastament que només ens interessava el total de les dues compres). Una de les persones assessores va comentar "*si surt de casa amb 199 euros i 98 cèntims, com hi pot tornar amb 98 euros i 198 cèntims si només ha fet una compra*?". La idea de "posar-ho en context realista" ens va fer pensar i amb dues compres sí que pot ser. Per exemple compra 54,54€ i paga amb 55 € i li tornen 46 cèntims. Després compra 45,45€ i paga amb 46 euros i li tornen 55 cèntims. I es queda, realment, amb 98 euros i 199 cèntims.
- També de vegades "per a trobar la solució" es fan proves, i això pot ser ben eficient. Una alumna ens va dir: si sortim amb un màxim de 200 €, amb el més que podem tornar és amb 100 €, però no es compleix el problema. Però si pensem que tornem a casa amb 99,99 € veiem que el doble són 199,98 € ... i ja hem trobat la solució!

Calculeu quants nombres hi ha de tres xifres que siguin múltiples de 9 i que estiguin formats per tres xifres imparelles.

Hem de buscar totes les possibilitats que amb tres xifres imparelles (és a dir triades entre 1, 3, 5, 7, 9 de les quals la suma de dues sempre és parell) otinguem una suma de 9 o múltiple de 9.

- Amb un 9 només pot ser 9+9+9 **--> 1 nombre** dels que interessen.
- Si la xifra més gran és un 7 podem aconseguir suma 9 amb 7+1+1 (**--> 3 nombres** per al recompte) i no podem aconseguir 18 (faria falta sumar 11 al 7, però amb dos imaprells només podem sumar un parell com ja hem dit) ni 27 (hauríem de sumar 20, que no pot ser)
- Si la xifra més gran és un 5 podem aconseguir suma 9 amb 5+3+1 (**--> 6 nombres**) i no podem aconseguir 18
- Si la xifra més gran és un 3 només podem fer 3+3+3 (**--> 1 nombre**)

Per tant la resposta és 11.

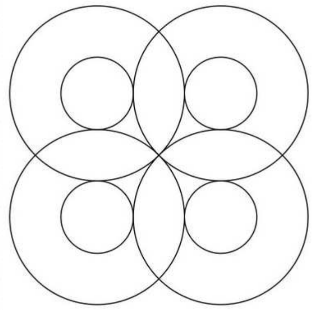
Ve a = 33

En un triangle en què les mesures de tots tres angles són nombres enters de graus, observem que un dels angles és 33º més gran que la mitjana dels altres dos. Quin és el màxim valor que pot tenir la mesura de l'angle més gran d'aquest triangle?

A partir de la idea d'una alumna prendrem com a variables l'angle de l'enunciat (xº) i la suma dels altres dos (yº). A partir de l'enunciat i de la suma dels angles d'un triangle tenim el sistema $\begin{cases} x = \frac{y}{2} + 33 \\ x + y = 180 \end{cases}$.

Si el resolem obtenim x = 82 i y =98. Quin pot ser l'angle més gran si han de ternir mesures enteres? Com que 98 = 97 + 1, l'angle més gran que pot tenir el triangle és de 97º.

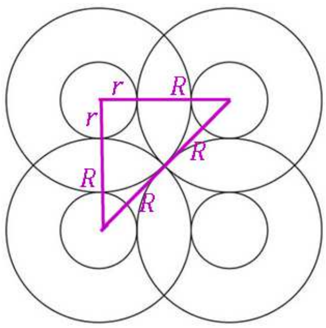
La figura mostra quatre parelles de cercles concèntrics, de manera que els centres dels quatre cercles petits formen un quadrat i cada cercle gran és tangent a dos cercles petits i a un cercle gran.



Si el radi dels cercles grans és de $3\sqrt{2}+3$ cm, quin és el radi, en cm, dels cercles menuts?

Nota: l'haureu de donar tan simplificat com sigui possible

La solució numèrica passa al problema 9 com a nombre *V*.



En un triangle rectangle isòsceles, si els catets mesuren c, la longitud de la hipotenusa és $c\sqrt{2}$.

El triangle rectangle de la figura és un triangle isòsceles, amb els catets iguals a $R + r$ i la hipotenusa $2R$.

En el nostre cas, doncs, $2R = (R + r) \cdot \sqrt{2}$; podem multiplicar per $\sqrt{2}$ i tenim $(2\sqrt{2} - 2)R = 2r$ o sigui $r = (\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 3) = 3$.

Vé un nombre V=3

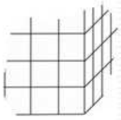
N és un nombre de cinc xifres.
Si p és el nombre de 6 xifres que es forma quan afegim una xifra 2 a la dreta de les xifres de N i q és el nombre de sis xifres que resulta si afegim una xifra 2 a l'esquerra de N, es compleix que $p = 3q$.
Quin és el nombre N?

Si indiquem $N = abcde$ aleshores el nombre $p = abcde2 = abcde0 + 2 = 10N + 2$ i el nombre $q = 2abcde = 200000 + N$. Segons l'enunciat, doncs, $10N + 2 = 3\cdot(200000 + N)$. D'aquí resulta $N = 85714$.

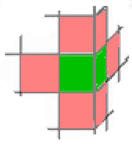
Vé Q=60

10

Un cub, del qual a la figura se'n veu la part propera a un vèrtex, està construït amb petits cubs (en direm *cubs unitaris*), tots iguals.



Direm que dos cubs unitaris són veïns si estan adossats per una cara.
En la construcció hi ha exactament 60 cubs unitaris que tenen, cada un, quatre veïns (però no cinc).
Quants cubs unitaris tenen cadascun 6 cubs veïns?



Els cubs que tenen quatre veïns exactament són els cubs de les arestes que no són els dels vèrtexs.
Com que en un cub hi ha 12 arestes, vol dir que en cada aresta hi ha $60/12 = 5$ d'aquests cubs.
Si hi afegim els cubs dels vèrtexs vol dir que cada aresta té 7 cubs unitaris. Per tant és un cub $7 \times 7 \times 7$.
Els cubs unitaris que tenen 6 cubs veïns són els cubs interiors al cub gran, els que no tenen cap cara exterior. Aquests cubs unitaris formen un cub $5 \times 5 \times 5$ i són, per tant, $5^3 = 125$.