

**Qüestions de 3 punts**

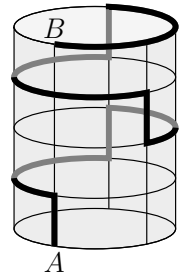
1. Quin és el valor de l'expressió  $\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$  després de simplificar?

- A) 1                      B)  $\frac{7}{10}$                       C)  $\frac{77}{110}$                       D)  $\frac{49}{10}$                       E) 49

2. La Júlia tira 5 daus i obté un total de 19 punts. Quin és el nombre màxim de sisos que pot haver tret?

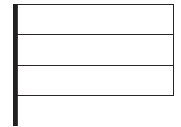
- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

3. Una llauna cilíndrica té una altura de 15 cm i el perímetre de la seva base circular és 30 cm. Una formiga camina des del punt A de la base fins al punt B del sostre. En el seu camí per la llauna, hi ha intervals en què es desplaça horitzontalment i en altres verticalment, i que estan marcats amb una línia més gruixuda (negra a la part frontal i grisa a la part posterior). Quant mesura el camí de la formiga?



- A) 45 cm                      B) 55 cm                      C) 60 cm                      D) 65 cm                      E) 75 cm

4. L'Emma té 4 colors i vol pintar una bandera de tres franges, amb l'única condició que dues franges adjacents no poden ser del mateix color. De quantes maneres ho pot fer?



- A) 27                      B) 24                      C) 48                      D) 36                      E) 65

5. Quina és la xifra de les unitats en el producte  $(5^5 + 1) \cdot (5^{10} + 1) \cdot (5^{15} + 1)$ ?

- A) 6                      B) 5                      C) 3                      D) 1                      E) 0

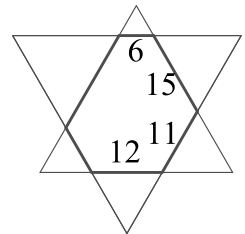
6. Quants triangles diferents hi ha de perímetre 10 cm i amb la longitud de cadascun dels seus costats un nombre enter?

- A) 5                      B) 11                      C) 6                      D) 2                      E) Una altra quantitat

7. Quants parells de nombres enters positius  $x, y$  satisfan l'equació  $x + 2y = 2^{10}$ ?

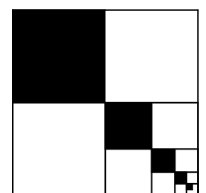
- A)  $2^9 - 1$                       B)  $2^9$                       C)  $2^9 + 1$                       D)  $2^9 + 2$                       E) 0

8. Dos triangles equilàters diferents s'han superposat per a formar un hexàgon amb costats oposats paral·lels. Coneixem la longitud de quatre costats d'aquest hexàgon, tal com es veu en la figura. Quin és el perímetre de l'hexàgon?



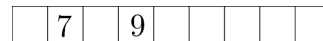
- A) 64                      B) 66                      C) 68                      D) 70                      E) 72

9. Un quadrat d'àrea 84 s'ha dividit en quatre quadrats. El quadrat superior de l'esquerra està pintat de negre. El quadrat inferior dret s'ha tornat a dividir en quatre quadrats, de la mateixa manera que s'ha fet amb el quadrat inicial. El procés es repeteix un nombre infinit de vegades. Quina àrea del quadrat inicial està pintada de negre?



- A) 24                      B) 28                      C) 31                      D) 35                      E) 42

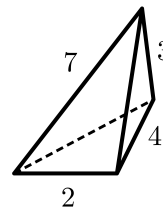
10. Els nombres enters de l'1 al 9 s'han de distribuir en les 9 caselles del dibuix de manera que tres nombres en caselles consecutives sumin un nombre múltiple de 3. Els nombres 7 i 9 ja estan col·locats. De quantes maneres es poden posar els nombres restants a les caselles que encara queden buides?



- A) 35                      B) 24                      C) 18                      D) 15                      E) 12

### Qüestions de 4 punts

11. Les longituds de les arestes d'una piràmide triangular són nombres enters. En mostrem quatre. Quant val la suma de les longituds de les altres dues arestes?



- A) 10                      B) 11                      C) 12                      D) 13                      E) 14

12. Ja sabeu que si  $n$  és un enter positiu, el seu factorial,  $n!$ , és el producte de tots els nombres enters des d'1 fins a  $n$ . Per exemple,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . Quina és la suma dels dígits de  $N$  si  $N! = 6! \cdot 7!$ ?

- A) 9                      B) 8                      C) 4                      D) 2                      E) 1

13. Les gràfiques de les funcions  $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$  passen totes per un mateix punt per a qualsevol valor de  $a$ . Quant val la suma de les coordenades d'aquest punt?

- A) 2                      B) 4                      C) 6                      D) 8                      E) 10

14. La suma de cinc nombres  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  és  $T$ . Aquests nombres satisfan la fórmula  $a_k = k + T$  per a  $1 \leq k \leq 5$ . Quant val  $T$ ?

- A)  $\frac{15}{4}$                       B)  $-\frac{15}{4}$                       C)  $-15$                       D) 15                      E) Cap dels valors anteriors

15. Quantes parelles de nombres enters  $m, n$  satisfan la desigualtat  $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$ ?

- A) 4                      B) 3                      C) 2                      D) 1                      E) 0

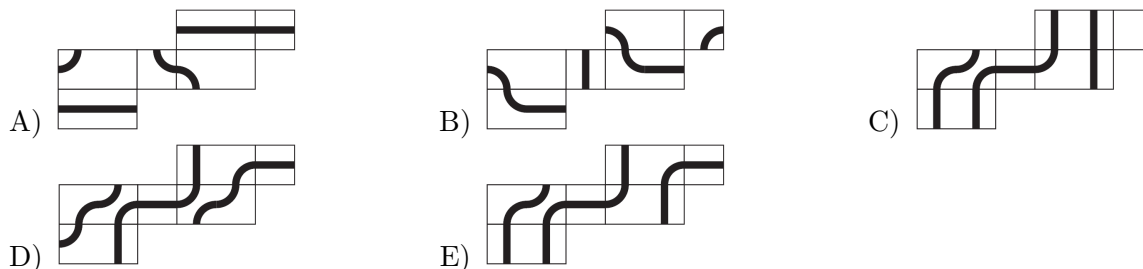
16. Vint-i-tres animals s'asseuen en una fila de butaques d'un cinema, sense deixar cap seient buit entre ells. Cada animal és un castor o un cangur. Cada un d'ells té almenys un veí que és cangur. Quin és el màxim de castors que hi pot haver a la fila?

- A) 12                      B) 11                      C) 10                      D) 8                      E) 7

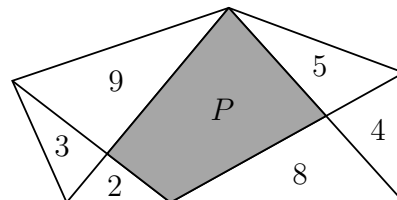
17. Si  $5^{(5^6)}$  s'escriu en la forma  $n^n$  per a un nombre natural  $n$ , quin és el valor de  $n$ ?

- A)  $5^{30}$                       B)  $5^6$                       C)  $5^5$                       D) 30                      E) 11

18. En Leo ha dibuixat un camí tancat en un prisma rectangular i l'ha desplegat. Quin dels desplegaments següents correspon al prisma d'en Leo?



19. Un pentàgon es divideix en set parts, tal com es veu en la figura. Els nombres que hi ha dins dels triangles indiquen el valor de les seves àrees. Quina és l'àrea  $P$  del quadrilàter gris?



- A) 15    B)  $\frac{31}{2}$     C) 16    D) 17    E) Cap de les anteriors

20. Quants nombres naturals són divisors de  $2^{20} \cdot 3^{23}$  però no ho són de  $2^{10} \cdot 3^{20}$ ?

- A) 13    B) 30    C) 273    D) 460    E) Cap de les anteriors

## Qüestions de 5 punts

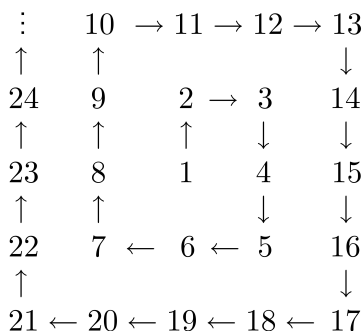
21. Dues funcions  $f$  i  $g$  satisfan el sistema d'equacions  $f(x) + 2g(1-x) = x^2$  i  $f(1-x) - g(x) = x^2$ . Quina funció és  $f$ ?

- A)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     B)  $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     C)  $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     D)  $x^2 - 4x + 5$   
 E) No existeixen dues funcions que compleixin l'enunciat.

22. En una competició d'escalada, 13 escaladors competeixen en tres categories. La puntuació final de cada competidor és el producte de les seves posicions en cada una de les tres categories. Per exemple, si un queda quart, tercer i sisè en les tres categories, la seva puntuació final és  $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ . Com més gran és la puntuació, més baixa és la posició final. Quina és la posició final més baixa que pot obtenir l'Anna si ha quedat primera en dues de les tres categories?

- A) 2a    B) 3a    C) 4a    D) 5a    E) 6a

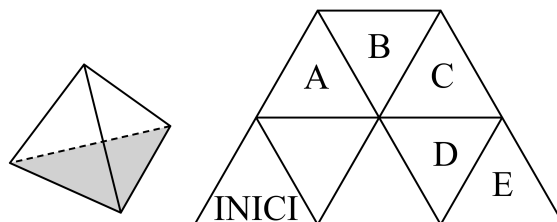
23. Es crea una espiral de nombres consecutius començant per l'1, tal com es mostra en la figura.



Si el patró format per l'espiral continués, en quina posició relativa trobaríem els nombres 625, 626 i 627?

- A)  $\begin{matrix} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$     B)  $\begin{matrix} 625 \rightarrow 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$     C)  $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$     D)  $\begin{matrix} 626 \rightarrow 627 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$     E)  $\begin{matrix} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$

24. Un bloc amb forma de tetraedre regular té una de les cares ombrejada. El bloc se situa en el taulell fent coincidir la cara ombrejada amb el triangle INICI. Aleshores el bloc es fa rodar d'un triangle al següent, rotant-lo per una aresta. En quin triangle s'aturarà per primera vegada sobre la seva cara ombrejada?



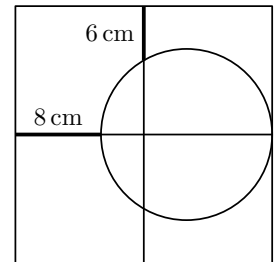
- A) A    B) B    C) C    D) D    E) E

25. Una part del polinomi de grau 5 que es mostra està tapada per una taca. Se sap que totes les cinc arrels del polinomi són enteres. Quina és la potència més gran de  $x - 1$  que divideix el polinomi?

$$x^5 - 11x^4 + \text{taca} - 7$$

- A)  $(x - 1)^1$       B)  $(x - 1)^2$       C)  $(x - 1)^3$       D)  $(x - 1)^4$       E)  $(x - 1)^5$

26. El quadrat gran del diagrama es divideix en quatre quadrats més petits. El cercle és tangent al costat dret del quadrat gran en el seu punt mitjà. Quina és la longitud del costat del quadrat gran?

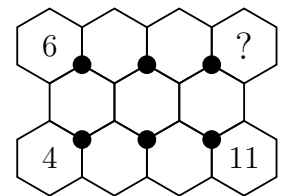


- A) 18 cm      B) 20 cm      C) 24 cm      D) 28 cm      E) 30 cm

27. Quin és el màxim comú divisor de tots els nombres de la forma  $n^3 (n + 1)^3 (n + 2)^3 (n + 3)^3 (n + 4)^3$ , on  $n$  és un enter positiu?

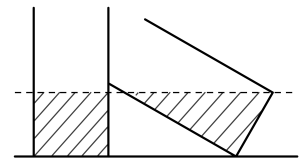
- A)  $2^9 3^3$       B)  $2^6 3^3 5^3$       C)  $2^9 3^6 5^3$       D)  $2^8 3^2 5^3$       E)  $2^9 3^3 5^3$

28. Posem els nombres de l'1 a l'11, cadascun en un dels hexàgons del diagrama, sense repetir-ne cap. Si la suma dels tres nombres que hi ha en els hexàgons que toquen a cada punt negre és la mateixa en tots els casos, quin nombre hem posat a l'hexàgon marcat amb un interrogant?



- A) 9      B) 3      C) 7      D) 4      E) 5

29. Dos cilindres idèntics contenen la mateixa quantitat d'aigua. Un dels dos s'inclina fins que la superfície de l'aigua toca la base del cilindre. En aquest moment els nivells d'aigua dels dos cilindres són iguals. La base de cada cilindre és un cercle d'àrea  $3\pi \text{ m}^2$ . Quina quantitat d'aigua conté cada cilindre?



- A)  $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$       B)  $6\pi \text{ m}^3$       C)  $9\pi \text{ m}^3$       D)  $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$   
 E) És impossible determinar-la amb la informació donada.

30. El producte de sis nombres consecutius és un nombre de 12 xifres amb la forma  $abb\ cdd\ cdd\ abb$ , on les xifres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  són quatre nombres consecutius no necessàriament ordenats. El valor de la xifra  $d$  és

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

**Qüestions de 3 punts**

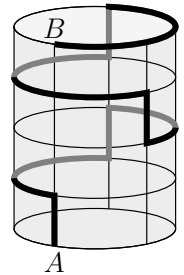
1. Quin és el valor de l'expressió  $\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$  després de simplificar?

- A) 1                      B)  $\frac{49}{10}$                       C)  $\frac{7}{10}$                       D)  $\frac{77}{110}$                       E) 49

2. La Júlia tira 5 daus i obté un total de 19 punts. Quin és el nombre màxim de sisos que pot haver tret?

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

3. Una llauna cilíndrica té una altura de 15 cm i el perímetre de la seva base circular és 30 cm. Una formiga camina des del punt A de la base fins al punt B del sostre. En el seu camí per la llauna, hi ha intervals en què es desplaça horitzontalment i en altres verticalment, i que estan marcats amb una línia més gruixuda (negra a la part frontal i grisa a la part posterior). Quant mesura el camí de la formiga?



- A) 75 cm                      B) 65 cm                      C) 60 cm                      D) 55 cm                      E) 45 cm

4. L'Emma té 4 colors i vol pintar una bandera de tres franges, amb l'única condició que dues franges adjacents no poden ser del mateix color. De quantes maneres ho pot fer?



- A) 27                      B) 36                      C) 24                      D) 65                      E) 48

5. Quina és la xifra de les unitats en el producte  $(5^5 + 1) \cdot (5^{10} + 1) \cdot (5^{15} + 1)$ ?

- A) 0                      B) 1                      C) 3                      D) 5                      E) 6

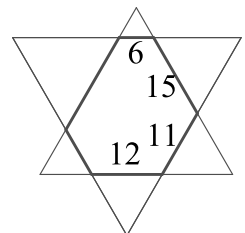
6. Quants triangles diferents hi ha de perímetre 10 cm i amb la longitud de cadascun dels seus costats un nombre enter?

- A) 6                      B) 2                      C) 11                      D) 5                      E) Una altra quantitat

7. Quants parells de nombres enters positius  $x, y$  satisfan l'equació  $x + 2y = 2^{10}$ ?

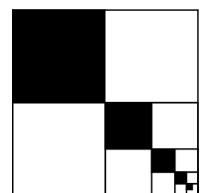
- A) 0                      B)  $2^9 + 2$                       C)  $2^9 + 1$                       D)  $2^9$                       E)  $2^9 - 1$

8. Dos triangles equilàters diferents s'han superposat per a formar un hexàgon amb costats oposats paral·lels. Coneixem la longitud de quatre costats d'aquest hexàgon, tal com es veu en la figura. Quin és el perímetre de l'hexàgon?



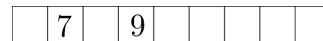
- A) 72                      B) 70                      C) 68                      D) 66                      E) 64

9. Un quadrat d'àrea 84 s'ha dividit en quatre quadrats. El quadrat superior de l'esquerra està pintat de negre. El quadrat inferior dret s'ha tornat a dividir en quatre quadrats, de la mateixa manera que s'ha fet amb el quadrat inicial. El procés es repeteix un nombre infinit de vegades. Quina àrea del quadrat inicial està pintada de negre?



- A) 42                      B) 35                      C) 31                      D) 28                      E) 24

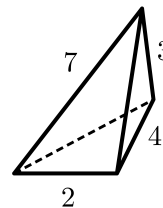
10. Els nombres enters de l'1 al 9 s'han de distribuir en les 9 caselles del dibuix de manera que tres nombres en caselles consecutives sumin un nombre múltiple de 3. Els nombres 7 i 9 ja estan col·locats. De quantes maneres es poden posar els nombres restants a les caselles que encara queden buides?



- A) 12                      B) 15                      C) 18                      D) 24                      E) 35

## Qüestions de 4 punts

11. Les longituds de les arestes d'una piràmide triangular són nombres enters. En mostrem quatre. Quant val la suma de les longituds de les altres dues arestes?



- A) 14                      B) 13                      C) 12                      D) 11                      E) 10

12. Les gràfiques de les funcions  $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$  passen totes per un mateix punt per a qualsevol valor de  $a$ . Quant val la suma de les coordenades d'aquest punt?

- A) 2                      B) 4                      C) 6                      D) 8                      E) 10

13. Ja sabeu que si  $n$  és un enter positiu, el seu factorial,  $n!$ , és el producte de tots els nombres enters des d'1 fins a  $n$ . Per exemple,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . Quina és la suma dels dígits de  $N$  si  $N! = 6! \cdot 7!$ ?

- A) 1                      B) 2                      C) 4                      D) 8                      E) 9

14. La suma de cinc nombres  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  és  $T$ . Aquests nombres satisfan la fórmula  $a_k = k + T$  per a  $1 \leq k \leq 5$ . Quant val  $T$ ?

- A) 15                      B)  $-15$                       C)  $-\frac{15}{4}$                       D)  $\frac{15}{4}$                       E) Cap dels valors anteriors

15. Quantes parelles de nombres enters  $m, n$  satisfan la desigualtat  $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$ ?

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

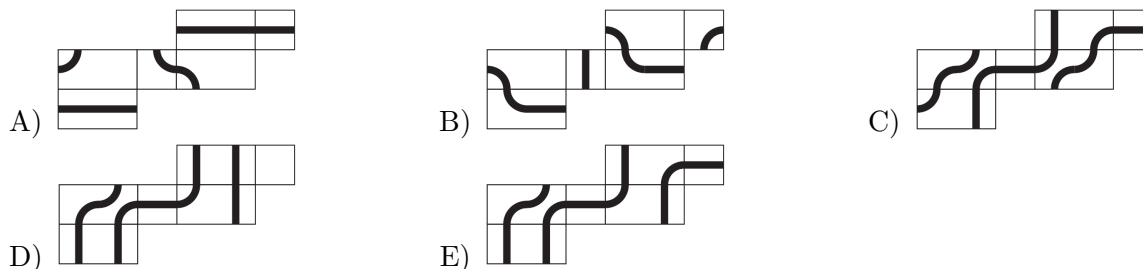
16. Vint-i-tres animals s'asseuen en una fila de butaques d'un cinema, sense deixar cap seient buit entre ells. Cada animal és un castor o un cangur. Cada un d'ells té almenys un veí que és cangur. Quin és el màxim de castors que hi pot haver a la fila?

- A) 7                      B) 8                      C) 10                      D) 11                      E) 12

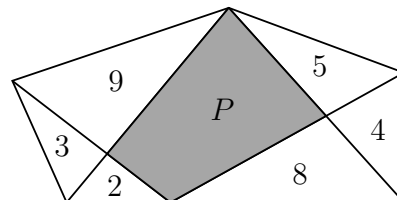
17. Si  $5^{(5^6)}$  s'escriu en la forma  $n^n$  per a un nombre natural  $n$ , quin és el valor de  $n$ ?

- A)  $5^{30}$                       B)  $5^6$                       C) 30                      D)  $5^5$                       E) 11

18. En Leo ha dibuixat un camí tancat en un prisma rectangular i l'ha desplegat. Quin dels desplegaments següents correspon al prisma d'en Leo?



19. Un pentàgon es divideix en set parts, tal com es veu en la figura. Els nombres que hi ha dins dels triangles indiquen el valor de les seves àrees. Quina és l'àrea  $P$  del quadrilàter gris?



- A) 17    B) 16    C)  $\frac{31}{2}$     D) 15    E) Cap de les anteriors

20. Quants nombres naturals són divisors de  $2^{20} \cdot 3^{23}$  però no ho són de  $2^{10} \cdot 3^{20}$ ?

- A) 460    B) 273    C) 30    D) 13    E) Cap de les anteriors

## Qüestions de 5 punts

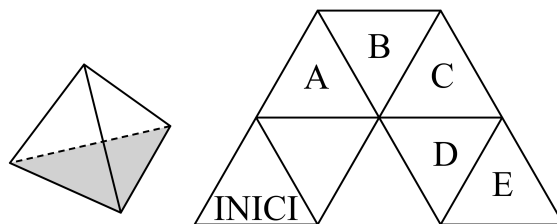
21. Dues funcions  $f$  i  $g$  satisfan el sistema d'equacions  $f(x) + 2g(1-x) = x^2$  i  $f(1-x) - g(x) = x^2$ . Quina funció és  $f$ ?

- A)  $x^2 - 4x + 5$     B)  $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     C)  $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     D)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$   
 E) No existeixen dues funcions que compleixin l'enunciat.

22. En una competició d'escalada, 13 escaladors competeixen en tres categories. La puntuació final de cada competidor és el producte de les seves posicions en cada una de les tres categories. Per exemple, si un queda quart, tercer i sisè en les tres categories, la seva puntuació final és  $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ . Com més gran és la puntuació, més baixa és la posició final. Quina és la posició final més baixa que pot obtenir l'Anna si ha quedat primera en dues de les tres categories?

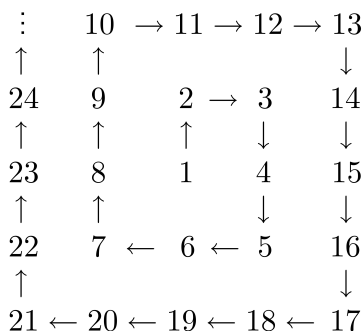
- A) 6a    B) 5a    C) 4a    D) 3a    E) 2a

23. Un bloc amb forma de tetraedre regular té una de les cares ombrejada. El bloc se situa en el taulell fent coincidir la cara ombrejada amb el triangle INICI. Aleshores el bloc es fa rodar d'un triangle al següent, rotant-lo per una aresta. En quin triangle s'aturarà per primera vegada sobre la seva cara ombrejada?



- A) A    B) B    C) C    D) D    E) E

24. Es crea una espiral de nombres consecutius començant per l'1, tal com es mostra en la figura.



Si el patró format per l'espiral continués, en quina posició relativa trobaríem els nombres 625, 626 i 627?

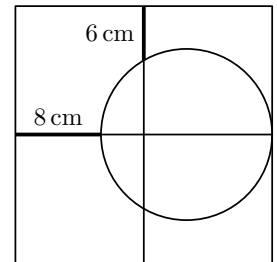
- A) 627    B) 626 → 627    C) 625 → 626 → 627    D) 625 → 626    E) 625  
 ↑    ↑          ↓    ↓  
 626    625       627    626  
 ↑                ↓  
 625             627

25. Una part del polinomi de grau 5 que es mostra està tapada per una taca. Se sap que totes les cinc arrels del polinomi són enteres. Quina és la potència més gran de  $x - 1$  que divideix el polinomi?

$$x^5 - 11x^4 + \text{taca} - 7$$

- A)  $(x - 1)^5$       B)  $(x - 1)^4$       C)  $(x - 1)^3$       D)  $(x - 1)^2$       E)  $(x - 1)^1$

26. El quadrat gran del diagrama es divideix en quatre quadrats més petits. El cercle és tangent al costat dret del quadrat gran en el seu punt mitjà. Quina és la longitud del costat del quadrat gran?

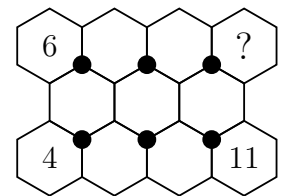


- A) 30 cm      B) 28 cm      C) 24 cm      D) 20 cm      E) 18 cm

27. Quin és el màxim comú divisor de tots els nombres de la forma  $n^3 (n + 1)^3 (n + 2)^3 (n + 3)^3 (n + 4)^3$ , on  $n$  és un enter positiu?

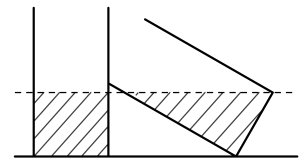
- A)  $2^9 3^3 5^3$       B)  $2^8 3^2 5^3$       C)  $2^9 3^6 5^3$       D)  $2^6 3^3 5^3$       E)  $2^9 3^3$

28. Posem els nombres de l'1 a l'11, cadascun en un dels hexàgons del diagrama, sense repetir-ne cap. Si la suma dels tres nombres que hi ha en els hexàgons que toquen a cada punt negre és la mateixa en tots els casos, quin nombre hem posat a l'hexàgon marcat amb un interrogant?



- A) 5      B) 4      C) 7      D) 3      E) 9

29. Dos cilindres idèntics contenen la mateixa quantitat d'aigua. Un dels dos s'inclina fins que la superfície de l'aigua toca la base del cilindre. En aquest moment els nivells d'aigua dels dos cilindres són iguals. La base de cada cilindre és un cercle d'àrea  $3\pi \text{ m}^2$ . Quina quantitat d'aigua conté cada cilindre?



- A)  $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$       B)  $9\pi \text{ m}^3$       C)  $6\pi \text{ m}^3$       D)  $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$   
E) És impossible determinar-la amb la informació donada.

30. El producte de sis nombres consecutius és un nombre de 12 xifres amb la forma  $abb\ cdd\ cdd\ abb$ , on les xifres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  són quatre nombres consecutius no necessàriament ordenats. El valor de la xifra  $d$  és

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5