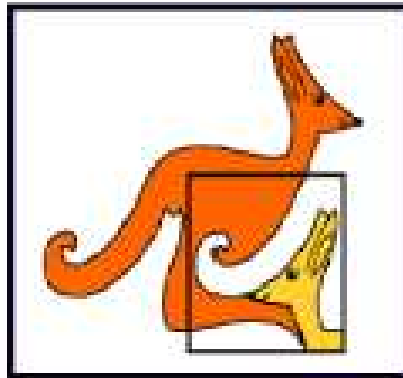




## XXVI Cangur de la SCM





# Kangourou sans Frontières

<http://www.aksf.org/countries.fr.xhtml>

Pays

## Members

Albanie	Allemagne	Arabie saoudite	Argentine
Arménie	Australie	Autriche	Azerbaïdjan
Belgique	Biélorussie	Bolivie	Bosnie-Herzégovine
Bésil	Bulgarie	Canada	Catalogne
Chili	Chypre	Colombie	Corée du Sud
Coste Rica	Croatie	Danemark	Équateur
Espagne	Estonie	États-Unis	Finlande
France	Grèce	Hongrie	Inde
Irak	Iran	Israël	Italie
Kazakhstan	le Kirghizstan	le Kosovo	Lettonie
Lituanie	Macédoine	Malaisie	Mexique
Moldavie	Mongolie	Mozambique	Myanmar
Niger	Norvège	Ouzbékistan	Pakistan
Panama	Paraguay	Pays-Bas	Philippines
Pologne	Porto Rico	Portugal	République dominicaine
République tchèque	Roumanie	Royaume-Uni	Russie
Serbie	Singapour	Slovaquie	Slovénie
Suède	Suisse	Tadjikistan	Tunisie
Turquie	Ukraine	Uruguay	Venezuela

## Applicants

Afghanistan	Chine	Égypte	Hong Kong
Indonésie	Liban	Pérou	Tanzanie
Zambie			

---

---

## Dedicatòria

---

---

En aquest complicat any 2021 volem agrair la confiança que han tingut, pel que fa a la proposta de la prova Cangur, el professorat i els centres que la van organitzar el dia 18 de març i van fer possible la participació en el concurs de més de 90 000 estudiants a Catalunya.

La Prova Cangur s'emmarca en una iniciativa internacional, liderada per l'associació *Kangourou sans Frontières*, creada a França l'any 1991 i que actualment té una vuitantena de països com a socis, amb representació nacional catalana a través de la Societat Catalana de Matemàtiques.

Amb el Cangur, volem transmetre als estudiants de tots els nivells el goig de fer matemàtiques proposant-los exercicis que van més enllà dels continguts estàndard del currículum, que representen un desafiament interessant i engrescador i que, fins i tot després del concurs, poden representar moments de trobada per a la família.

La prova Cangur és el resultat de tot un any de feina. Propostes inicials dels països, míting internacional, adaptació dels enunciats... Tot un repte que la comissió Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques tira endavant amb dedicació admirable any rere any i que és capaç de superar situacions especialment difícils i incertes com la d'aquest any 2021.

En aquest llibret trobareu referències al Cangur 2021 i també un parell de propostes fantàstiques d'entreteniment matemàtic: unes pinzellades d'un llibre sobre il·lusions òptiques de l'equip de França de Le Kangourou i un recull de problemes de geometria. Compte, que, si us hi engresqueu molt, poden ser addictius!

Gràcies una altra vegada per la confiança col·lectiva en el Cangur. Ja mirem amb ganes la propera edició, la XXVII, en què ja esperem poder oblidar-nos de restriccions i avançar decididament cap a la normalitat.

DOLORS HERBERA  
Presidenta de la Societat Catalana de Matemàtiques

---

---

---

---

# Geometria sense fórmules

---

---

Comencem aquesta publicació amb una proposta que ens sembla que és interessant.

Es tracta d'uns puzles geomètrics que la professora anglesa CATRIONA AGG ha ideat i compartit en el seu twitter <https://twitter.com/Cshearer41>. En alguns casos «veureu» quina pot ser la solució numèrica però us animem a que proveu de demostrar-ho en general... i que ho feu per raonaments euclidians.

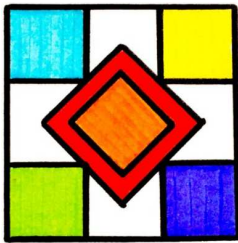
Potser pensareu que el GeoGebra us pot ajudar. És ben cert, i si ho feu constatareu que, de vegades, arribar a la construcció acurada ajuda a la demostració general. Per si ja ho heu provat i no avanceu, en les darreres pàgines d'aquest fulletó s'inclouen idees-clau que us poden ajudar a trobar el camí de raonament.

L'autora ens envia una salutació: «*That sounds really exciting, please do use key ideas for my puzzles!*»

---

---

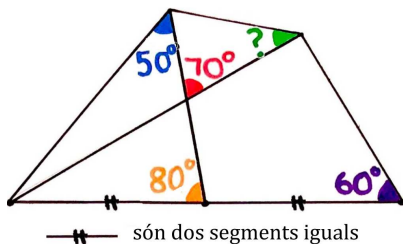
1. Uns quadrats en un quadrat gran d'àrea 36.  
Les sis zones acolorides tenen la mateixa àrea.  
Quina és la mesura total de l'àrea acolorida?



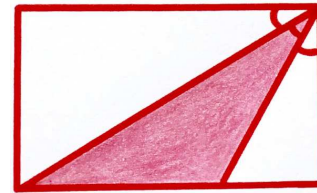
2. Un hexàgon regular pintat de colors.  
Hi ha més color blau o color vermell?  
En quina proporció?



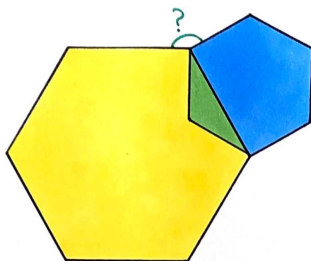
3. Quin és el valor de l'angle de color verd?



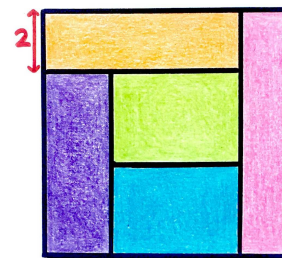
4. Els tres angles són iguals.  
Quina fracció del rectangle està acolorida?



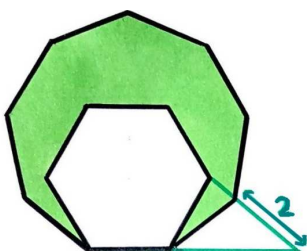
5. Dos hexàgons regulars.  
Quant fa l'angle indicat?



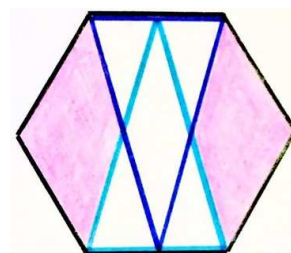
6. Un quadrat descompost en cinc rectangles, tots de la mateixa àrea.  
Quina es l'àrea del quadrat?



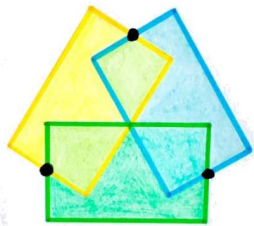
7. Dos polígons regulars.  
Quin és el perímetre de la regió acolorida? (un polígon de 13 costats)



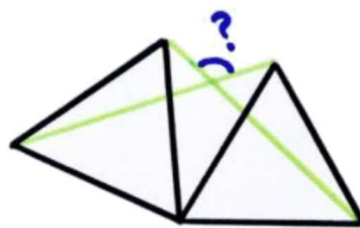
8. Un hexàgon regular i dos triangles isòsceles.  
Si l'àrea de l'hexàgon és 30, quant fa l'àrea que no està coberta per cap dels triangles?



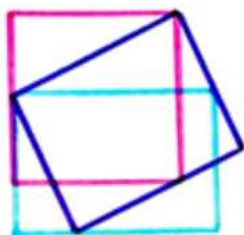
9. Tres rectangles iguals, d'àrea 4.  
Superposats de manera que els punts marcats  
són punts mitjans dels costats curts.  
Quina àrea total cobreix el dibuix?



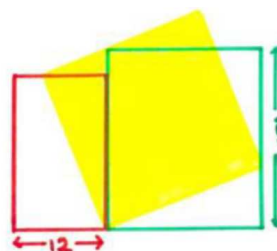
10. Dos triangles equilàters iguals.  
Quant fa l'angle marcat?



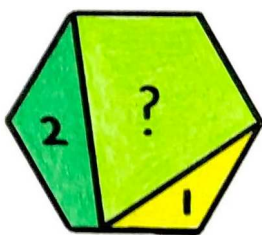
11. Tres rectangles.  
Quin de tots tres té l'àrea més gran??



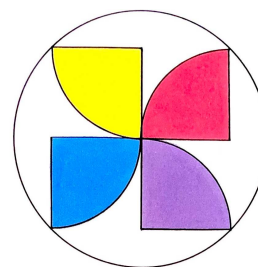
12. Dos rectangles i un quadrat, d'àrea doble  
que la del rectangle vermell.  
Quant fa l'altura del rectangle verd?



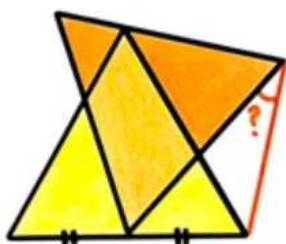
13. Un hexàgon descompost en tres parts.  
Coneixem l'àrea de dues de les parts.  
Quina és l'àrea desconeguda?



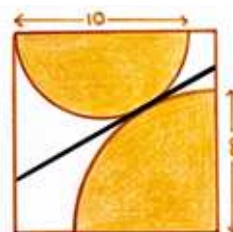
14. Quatre quadrants de cercle en un cercle.  
Quina part de l'àrea del cercle ocupen?



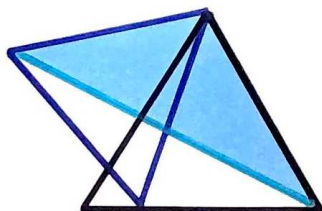
15. Dos triangles equilàters.  
Quina és la mesura de l'angle?



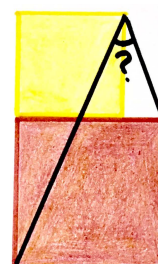
16. Quadrat, semicercle, quadrant de cercle.  
Longitud del segment de tangent comuna  
al semicercle i al quadrant?



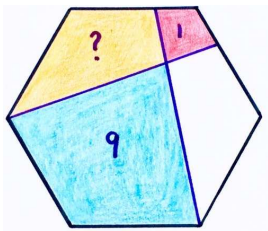
17. Dos triangles equilàters.  
El més gran de tots dos té àrea 5.  
Quina és l'àrea del triangle acolorit?



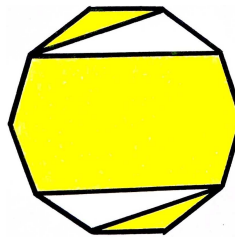
18. Dos quadrats, un d'àrea doble que  
l'altre. Quant fa l'angle assenyalat?



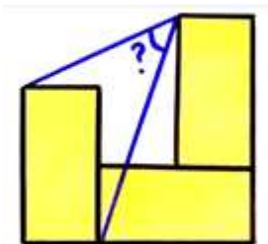
19. Dos estels en un hexàgon regular.  
En coneixem les àrees.  
Quina és l'àrea del quadrilàter groc?



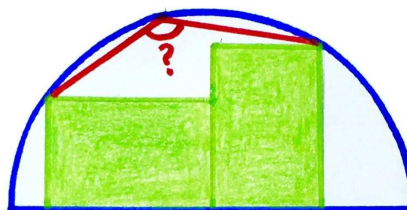
20. Un decàgon regular descompost en quatre triangles i un hexàgon. Quin percentatge de l'àrea del decàgon és groga?



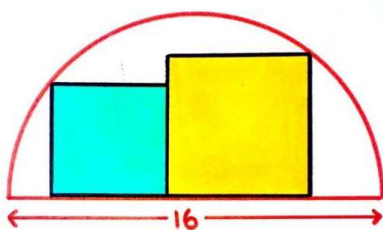
21. Tres rectangles iguals.  
Quant fa l'angle indicat?



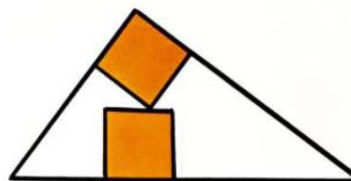
22. Dos rectangles iguals en un semicercle.  
Quant fa l'angle?



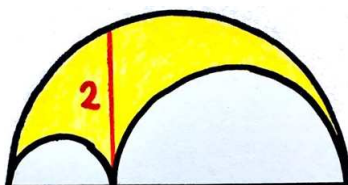
23. Dos quadrats i un semicercle.  
Quina és l'àrea acolorida total?



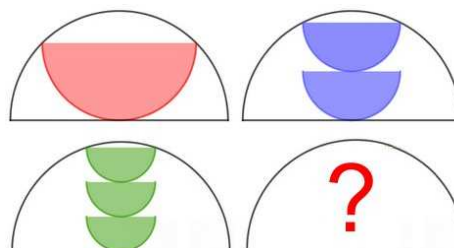
24. Perímetre de cada quadrat, un terç del perímetre del triangle.  
Fracció acolorida de l'àrea del triangle?



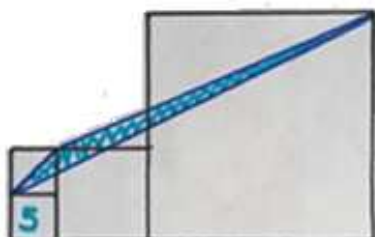
25. La línia vermella és perpendicular als diàmetres dels tres semicercles.  
Quant fa l'àrea groga?



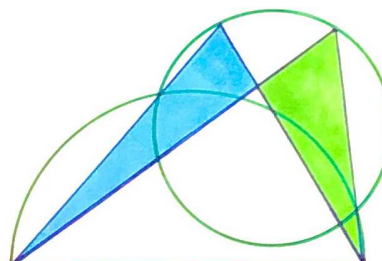
26. Un, dos i tres semicercles en un semicercle.  
Quin és el percentatge acolorit en cada cas?  
Què vindria després?



27. Quatre quadrats grisos i un triangle blau.  
El quadrat de baix a l'esquerra té àrea 5.  
Quina és l'àrea del triangle?



28. Un cercle, un semicercle i dos triangles.  
Quin dels dos triangles té l'àrea més gran?





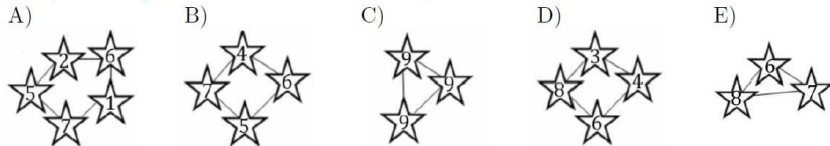
# Alguns problemes triats

Hem demanat a les noies i els nois que han obtingut premi de podi en el XXVI Cangur, o premi en els concursos telemàtics (la XIV Olitele i la XI Marató) que triïn un problema del concurs que han fet amb èxit i que ens diguin la idea-clau que els ha ajudat. En les pàgines següents podeu trobar la selecció que han fet i les idees que han donat.

## Cangur de Primària

5è. Nil Sanyé Sánchez (Escola Guerau de Liost, Les Franqueses). Vaig eliminar les constel·lacions que no tenien cap nombre més petit que 4 (B,C i E) i després ja només calia sumar.

5. A la constel·lació Cangur, totes les estrelles contenen un número més gran que 3 i la seva suma és 21. Quina d'aquestes és la constel·lació Cangur?



5è. Llibert Cabrero (Thau, Barcelona). He anat sumant diferents nombres agrupats i només ha quadrat quan he sumat  $2 + 3 + 5$  i  $4 + 6$ .

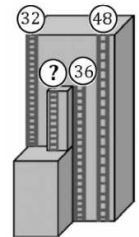
15. Tenim cinc cartes com les que es veuen en la figura i les repartim en dues capses. Si sumem els nombres de les cartes que hem posat a cada capsa, obtenim el mateix resultat. Quina carta ha d'estar a la capsa on hi ha la carta del 4?



A) La del 3    B) La del 5    C) La del 5 o la del 6    D) La del 6    E) No es pot saber.

5è. David Barajas Alcalde (Frederic Mistral-Tèc. Eulàlia). El vaig resoldre amb l'operació de la resta, una per a saber la mesura del bloc petit i després una altra per a la resposta.

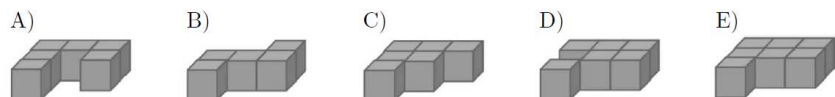
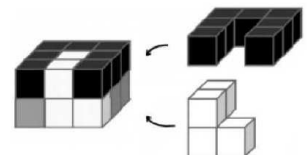
18. En aquest gratacel hi ha quatre escales de seguretat contra incendis. L'altura de les escales està marcada a la part superior de cadascuna d'elles. Quina és l'altura de l'escala marcada amb l'interrogant?



A) 12    B) 14    C) 16    D) 20    E) 22

6è. Irene Calderón (Escola Quatre Vents, Sant Jaume dels Domenys) Després de mirar-lo bé, em vaig adonar que sols havia de fer unes restes.

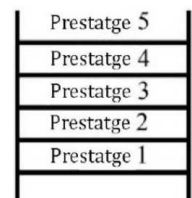
21. Hem fet un ortoedre amb divuit cubs de tres colors diferents: negres, blancs i grisos. Les imatges de la dreta mostren com són la part blanca i la part negra que el formen. Quina de les imatges següents correspon a la part grisa?



5è. Duna Polo (Escola de Llers). Em vaig imaginar que muntava les peces blanca i negra, i aleshores mirava quina de les cinc opcions encaixava per fer la figura.

22. En Pau té cinc joguines: una pilota, un joc de blocs, un videojoc, un trencaclosques i un cotxe. Posa cada joguina en un prestatge diferent de la prestatgeria. La pilota està més amunt que els blocs i més avall que el cotxe. El videojoc està directament a sobre de la pilota. A quin prestatge no es pot col·locar el trencaclosques?

A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5



5è. Queralt Díaz (Tecnos, Terrassa). Aquest problema em va fer pensar molt i per això em va agradar. Vaig fer un dibuix del prestatge i vaig anar escrivint, en les possibles variants, les inicials dels objectes als diversos llocs on podien anar.

6è. Marc Serrapiñana (Aula). Vaig veure que entre les dues primeres vegades es va menjar una branca (20 fulles) i per això en total en va menjar 22 i ja només cal restar de 60.

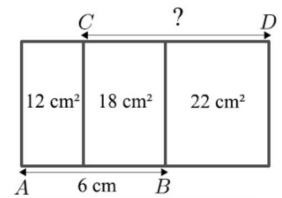
16. El cangur tenia, per dinar, tres branques amb 20 fulles cadascuna. Es va menjar algunes fulles de la primera branca. Després, de la segona branca, es va menjar tantes fulles com quedaven a la primera. Finalment, de la tercera se'n va menjar dues fulles. Quantes fulles sense menjar van quedar entre les tres branques?

A) 20    B) 22    C) 28    D) 32    E) 38

Ignacio González (Oak House, Barcelona). Em sembla molt divertit i interessant. La idea que em va facilitar la resolució va ser la d'utilitzar àlgebra.

6è. Berta Uria (Maristes Sants-Les Corts). Vaig anar mirant diferents rectangles de la figura, ajuntant-los de dos en dos. D'aquesta manera, pensant que l'àrea és base per altura, vaig trobar la solució.

24. Tres rectangles de la mateixa altura es col·loquen com mostra la figura. Dintre dels rectangles s'indiquen les seves àrees respectives. Si el segment  $AB$  mesura 6 cm, quant mesura el segment  $CD$ ?



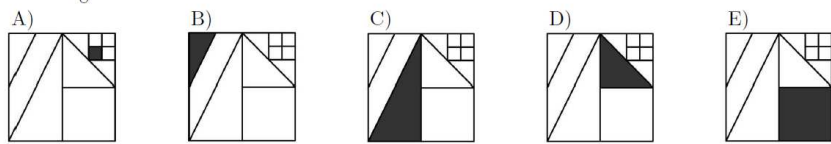
- A) 8,5 cm      B) 7 cm      C) 8 cm  
D) 8,2 cm      E) 7,5 cm

## Cangur de primer d'ESO

Joan Puig Cortina. (Institut Montserrat Roig, Barcelona). No sabia triar els problemes que més m'han agradat però m'ho vaig passar molt bé fent-los. Vaig fer servir el raonament lògic per resoldre'ls.

Ricardo Batanero. (Sant Antoni Maria Claret, Cornellà). El problema que més m'ha agradat és el 9 i l'he respost sabent, com a idea fonamental, que un quadrat i un rectangle es poden dividir en dos triangles iguals.

9. En cadascun dels cinc quadrats de les opcions de resposta s'han dibuixat segments de recta. Els extrems dels segments són o vèrtexs del quadrat o punts mitjans d'altres segments. En quin dels cinc casos està ombrada  $\frac{1}{8}$  part de l'àrea del quadrat gran?



Marc Castellà (Casp - Sagrat Cor de Jesús). Em va agradar el problema 28, però encara més el 29. Per resoldre'l vaig dibuixar el cub que em descrivia l'enunciat i així, fixant-m'hi bé, vaig poder comptar els petits cubs que quedaven amb pintura vermella en alguna cara.

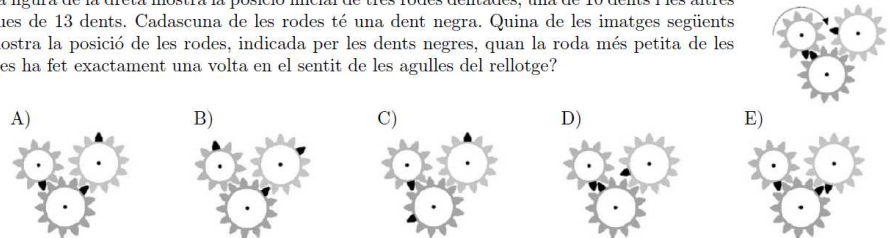
29. Tenim un cub que té l'aresta de 7 cm de longitud. En cada una de les sis cares d'aquest cub tracem, en vermell, les dues diagonals. Després talem el cub en petits cubs, cadascun amb l'aresta d'1 cm de longitud. Quants d'aquests petits cubs tenen pintura vermella en alguna de les seves cares?

- A) 54      B) 70      C) 84      D) 78      E) 62

## Cangur de segon d'ESO

Pol Riera Brufau (Montessori - Palau). El problema que he triat és el 18, perquè vaig haver d'imaginar els engranatges com en la vida real.

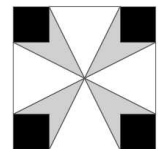
18. La figura de la dreta mostra la posició inicial de tres rodes dentades, una de 10 dents i les altres dues de 13 dents. Cadascuna de les rodes té una dent negra. Quina de les imatges següents mostra la posició de les rodes, indicada per les dents negres, quan la roda més petita de les tres ha fet exactament una volta en el sentit de les agulles del rellotge?



Arnau Bulach Masgrau (Institut Joaquina Pla i Farre-ras. Sant Cugat del Vallès). El que he fet ha estat aplicar fórmules de càlcul d'àrees i he intentat trobar la solució calculant àrees de formes geomètriques que no figuraven en la pregunta però que ajudaven a resoldre-la.

20. L'àrea del quadrat gran fa  $16 \text{ cm}^2$  i l'àrea de cada quadrat petit (negre) fa  $1 \text{ cm}^2$ . Quina és l'àrea de la part grisa?

- A)  $3 \text{ cm}^2$       B)  $\frac{7}{2} \text{ cm}^2$       C)  $\frac{11}{2} \text{ cm}^2$       D)  $6 \text{ cm}^2$       E)  $4 \text{ cm}^2$



Arnau Fabra Barceló (Institut Les Planes. Santa Bàrbara).

Per a resoldre'l vaig pensar que si hi havia 3 colors diferents de cangurs podia mirar quin coincidia en els múltiples de 3, en aquests més un i, finalment, en aquests menys un.

25. Es disposen en fila 2021 cangurs de colors i es numeren de l'1 al 2021. Cada cangur és de color gris, vermell o blau. A qualsevol grup de tres cangurs consecutius hi ha cangurs dels tres colors. En Bernat ha anotat els colors de cinc cangurs: el cangur 2 és gris, el cangur 20 és blau, el cangur 202 és vermell, el cangur 1002 és blau i el cangur 2021 és gris. Només una de les seves anotacions és errònia. Quin és el número del cangur del qual no ha anotat correctament el color?

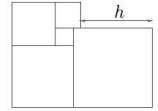
- A) 2      B) 202      C) 1002      D) 20      E) 2021



# Cangur de tercer i quart d'ESO

3r. Izan Membrive Zurita (Institut de Santa Coloma de Farners).

16. Cinc quadrats estan situats com mostra la figura. L'àrea del quadrat petit fa  $1\text{ cm}^2$ . Quina és la longitud  $h$ , expressada en cm?



- A) 3      B) 4,5      C) 3,5      D) 4      E) 4,2

Vaig expressar algebraicament els costats dels quadrats i vaig descobrir que la distància que resulta si restem el costat del quadrat més gran i  $h$  és un valor sense importància, perquè el costat de cada un dels quadrats d'àrea desconeguda és un nombre natural (1, 2, 3 i 4) més aquesta distància.

3r. Arnau del Río (Institut Joan Mercader, Igualada).

17. Quina és la xifra de les unitats de  $2^{2021} + 5^{2021}$ ?

- A) 9      B) 7      C) 3      D) 8      E) 1

La idea-clau per a aquest problema és que en una suma de nombres gegants, si només vols la xifra de les unitats, pots ignorar la resta de xifres. En la multiplicació reiterada igual, però en aquest cas encara és més fàcil, perquè les potències de 5 acaben en 25 (només a partir de  $5^2$ , òbviament) i els múltiples de 2 segueixen un patró, i aleshores cal fer l'exponent 2021 mòdul la llargada del patró. Trobo que és un problema molt interessant que a primera vista sembla molt més difícil del que realment és.

3r. Arnau Noguera (Institut Esteve Albert, St Vicenç de Montalt). El problema més divertit i que em va agradar més era el número 28, el dels trolls.

28. En un bosc hi ha 21 elfs que sempre diuen la veritat i 2000 trolls que sempre menteixen. Un mag va dividir 2020 d'aquests 2021 éssers en 1010 parelles. Es va preguntar a cada ésser si la seva parella era elf o troll. 2000 éssers van contestar que les seves parelles eren elfs i 20 van contestar que eren trolls. Quantes parelles de dos trolls hi havia?

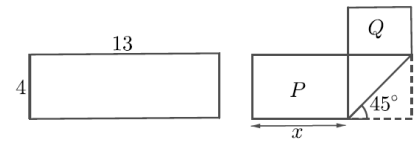
- A) 995      B) 980      C) 985      D) 1000      E) 990

Per poder-ho resoldre vaig haver de fer totes les combinacions possibles. La clau és saber què diuen quan hi ha una parella mixta.

4t. Alèxia Escudero Ribó (Institut Morelló. Esterri d'Àneu.) La idea clau va ser veure que només els elfs que tinguin de parella un troll i els trolls que tinguin de parella un elf respondran que la seva parella és un troll.

4t. Nil Leg (Escola Pia de Terrassa). Vaig veure que el doblec formava un triangle isòsceles i llavors es podia saber que 4 dels 13 d'un costat es podien eliminar i em quedava 9. Es creaven dos rectangles un el doble de gran que l'altre i amb una equació vaig obtenir la resposta.

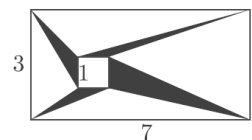
16. Una tira de paper rectangular de dimensions  $4 \times 13$  s'ha plegat com mostra la figura. Les àrees dels dos rectangles que es formen ( $P$  i  $Q$ ), compleixen  $P = 2Q$ . Quant val  $x$ ?



- A) 5      B)  $4\sqrt{2}$       C) 6,5      D) 6      E) 5,5

4t. Roger Lidón (Escoles Minguella, Badalona). Vaig raonar que la resposta no dependia de la posició del quadrat i vaig estudiar el cas en què el quadrat petit es troba a una de les cantonades del rectangle.

25. A l'interior d'un rectangle de  $3 \times 7$  hi ha dibuixat un quadrat de costat 1. Els costats d'aquest quadrat són paral·lels als del rectangle i els vèrtexs del quadrat s'uneixen als del rectangle, tal com es mostra en la figura. Quin és el valor de la suma de les àrees dels quatre triangles negres?



- A) 4,5      B) 7      C) 4      D) 5  
E) Depèn de la posició del quadrat a l'interior del rectangle.

4t. Adriana Aguiló (Aula). Per resoldre'l m'ha resultat un punt clau que en el temps en que en Lluís torna enrere 150 m l'Andreu corre la meitat del pont. Com que inicialment en Lluís no va 150 m cap a la meitat, sinó uns altres 150 m cap endavant observem: Andreu a mig pont i Lluís a mig pont + 300.

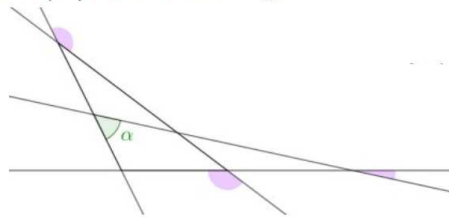
29. En Lluís caminava per un pont i va sentir un xiulet; es va girar i va veure que l'Andreu era al principi del pont i que corria cap a ell. Si en Lluís hagués caminat 150 m cap a l'Andreu, s'haurien trobat exactament al punt mitjà del pont. Però en Lluís va continuar caminant endavant i l'Andreu va seguir corrent, tots dos en el mateix sentit de circulació i, aleshores, l'Andreu va atrapar en Lluís just quan tots dos arribaven al final del pont. Suposant que l'Andreu corre a velocitat constant, i que en Lluís camina a velocitat constant i que hauria anat a la mateixa velocitat si hagués tornat enrere, calculeu quina és la longitud del pont.

- A) 600 m      B) 900 m      C) 300 m      D) 450 m      E) 750 m

## Marató de problemes

Laia Abio (Institut de Sant Pol de Mar). La idea clau per resoldre'l va ser localitzar dos triangles on s'establien relacions entre els angles morats, l'angle  $\alpha$  i un angle auxiliar. Les sumes dels angles de cada triangle em van donar dues equacions i així vaig trobar la relació entre  $\alpha$  i els angles morats.

3. Es demana que dedueixis quin és el valor de la suma dels tres angles de color morat en funció de l'angle  $\alpha$



Alèxia Escudero Ribó (Institut Morelló. Esterrí d'Àneu).

6. Quants nombres enters positius de quatre xifres tenen la propietat que el resultat de calcular el producte de les seves quatre xifres té com a màxim tres divisors enters positius?

(és a dir que té 1, o 2 o 3 divisors)

La idea clau per a mi va ser que només els nombres de la forma  $p$  o  $p^2$  (amb  $p$  un nombre primer) tenen 3 divisors o menys, i també  $1^n$ , amb  $n$  natural, tindrà menys de 3 divisors, ja que  $1^n$  sempre tindrà un sol divisor.

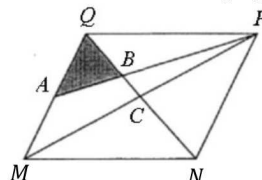
Ruben Carpenter (Institut Escola Costa i Llobera, de Barcelona; Helena Folia (Institut Jaume Balmes de Barcelona) i Roger Lidón (Escoles Minguella, de Badalona) han escollit el problema 10 de la marató.

Ruben i Helena indiquen que la clau per resoldre'l era veure que  $ABQ$  i  $PBN$  són dos triangles semblants i això permet relacionar l'àrea del paral·lelogram i la del triangle.

Roger Lidón pren com a idea bàsica el fet que  $B$  és el baricentre del triangle  $MQP$ , i llavors  $2AB = BP$ .

10. En el paral·lelogram  $MNPQ$  hem dibuixat les diagonals, que es tallen en el punt  $C$ . El punt  $A$  és el punt mitjà del costat  $QM$  i el segment  $PA$  talla la diagonal  $QN$  en el punt  $B$ . Si l'àrea del triangle  $ABQ$  és de  $2,75 \text{ cm}^2$ , pots deduir quina és l'àrea del paral·lelogram  $MNPQ$ ?

**Nota:** En cas afirmatiu hauràs de respondre el valor de l'àrea de  $MNPQ$ ; en cas negatiu hauràs de respondre **no** i donar el valor màxim que pot tenir l'àrea.



## Concurs telemàtic Olitele

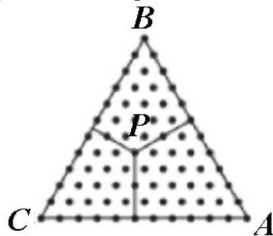
Hugo Lladró (IES Francisco Figueras Pacheco, Alacant); Roger Lidón (Escoles Minguella, de Badalona); Raquel Trull (Institut Jaume Viens Vives, Girona), i Roger Bargalló (Institut Jaume Viens Vives, Girona) han escollit el problema 6 de l'Olitele.

Hem mesurat cinc costats consecutius d'un hexàgon circumscrit a una circumferència, i hem obtingut, en aquest ordre, 5, 9, 8, 7 i 10 unitats. Quantes unitats mesura el sisè costat de l'hexàgon?

A part que Raquel Trull diu que va enfocar el problema de manera diferent a com seria tradicional, les idees concretes que s'expliquen van en la línia de considerar el fet que la distància del punt de tangència al vèrtex és la mateixa per ambdós costats. Aleshores amb un càlcul algebraic es dedueix que la suma de la longitud dels costats alterns ("parells" i "senars") en un hexàgon circumscrit a una circumferència és la mateixa. La solució del problema a partir d'ací és senzilla.

Abel Salinas (aula Escola Europea) va triar el problema 9 de l'Olitele i ens diu que per a solucionar-lo, la idea clau és que la regió a l'interior del triangle equilàter que conté tots els punts pels quals les distàncies  $a$ ,  $b$  i  $c$  poden ser els costats d'un triangle també té forma de triangle equilàter.

En un triangle equilàter de costat 11 marquem els punts que divideixen cada costat en 11 parts iguals i, a partir d'ells, sempre a distàncies iguals, completem un conjunt de punts com en un geoplà triangular.



Per cada punt  $P$  que hem dibuixat calculem les distàncies  $a$ ,  $b$  i  $c$  de  $P$  als costats  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ , respectivament. Es pregunta, per quants dels 78 punts que hi ha al geoplà, les distàncies  $a$ ,  $b$  i  $c$  poden ser els costats d'un triangle.

# Cangur de batxillerat

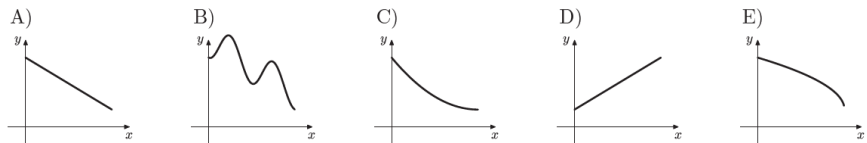
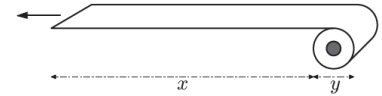
(de 1r). Joan Tubert Mascort (Institut de Cassà de la Selva), va triar el problema 30 i diu que «hi havia moltes preguntes interessants, per no dir totes». Per a resoldre'l feia falta trobar el patró que es segueix, i un cop saps què has de trobar, a partir de les informacions que et dona el problema vas aplicant la lògica fins que obtens la resposta.

30. Tenim 2021 boles col·locades en fila i numerades de l'1 al 2021. Cada bola està pintada d'un dels quatre colors següents: verd, roig, groc o blau. En qualsevol grup de cinc boles consecutives n'hi ha exactament una de roja, una de groga i una de blava. Després d'una bola roja sempre hi ha una bola groga. Les boles numerades amb el 2, el 20 i el 202 són verdes. De quin color és la bola 2021?
- A) Groga      B) Roja      C) Verda      D) Blava      E) No es pot saber.

(de 2n). Àlex Rodríguez García (Institut Jaume Vicens Vives), dubtava entre el problema 18 i el 19 «perquè al darrera hi ha una idea intuïtiva bàsica d'allò que s'estudia a topologia i una equació diferencial». Va triar finalment el 19 i diu:

Cal imaginar la situació i és força divertida i la idea-clau ha estat valorar l'esforç que ha de fer el gos per treure una volta del rotlle si aquest és molt gran, i el que ha de fer quan el paper del rotlle està a punt d'acabar-se.

19. Un gosset juganer agafa l'extrem d'un rotlle de paper higiènic i s'allunya a una velocitat constant. Quina de les funcions següents descriu millor el gruix  $y$  del rotlle en funció de la longitud  $x$  desenrotllada?



(de 2n). Gabriel Isaac Badia Estany (Institut Josep Brugulat, Banyoles) exposa com a idea-clau el fet d'adonar-se que per a cada nombre natural  $n$  es compleix que  $f(n) = (f(1))^n$  i a partir d'aquest fet s'arriba a la solució.

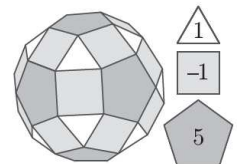
23.  $f(x)$  és una funció de nombres reals que compleix  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  i  $f(1) = 2$ . Quin és el valor de l'expressió següent?

$$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$$

- A)  $2^{2020}$       B)  $\frac{2021}{2020}$       C) 2020      D) 2021      E) Cap de les respostes anteriors

(de 2n). Joan Vila Miñana (Institut Cultural del CIC, Barcelona)

24. El políedre representat té dotze cares pentagonals regulars i les altres cares són triangles equilàters o quadrats. Cada aresta dels pentàgons és comuna a una aresta d'un quadrat i cada aresta dels triangles també és comuna a una aresta d'un quadrat. En Joan escriu un 1 a cada triangle, un 5 a cada pentàgon i un  $-1$  a cada quadrat. Quina és la suma total dels nombres escrits en el políedre?



- A) 80      B) 60      C) 50      D) 20      E) 120

Vaig estudiar quantes arestes compartien cada parella de formes geomètriques i a partir del fet que els pentàgons només compartien arestes amb els quadrats vaig deduir el nombre de quadrats; després amb el nombre d'arestes d'aquests quadrats que quedaven sense ocupar vaig poder deduir el nombre de triangles.

Gràcies per les vostres intervencions!!!

---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades globals

---

---

### Nombre de centres

Centres diferents inscrits en el **Cangur 2021**: 916.

- Per zones geogràfiques:  
593 de la província de Barcelona (dels quals 140 de la ciutat de Barcelona); 132 de la província de Girona; 70 de la província de Lleida; 120 de la província de Tarragona i 1 de la Franja de Ponent.
- Pels tres nivells d'organització del Cangur:  
en el Cangur de primària: 484 centres; en el Cangur123 (1r, 2n i 3r d'ESO): 600 centres; en el Cangur de 4t d'ESO, batxillerat i CF: 530 centres.

---

El Cangur 2021 es va convocar en el context dels condicionants derivats de la COVID; és per això que si comparem el nombre de centres participants, 916, amb els de l'any 2019, en què es va assolir el màxim de centres participants, amb 1136, s'ha de valorar com un èxit el fet d'haver convocat l'activitat i és imprescindible valorar l'esperit de col·laboració dels centres i el professorat i dir ben fort: **gràcies!!!**.

Cada centre inscrit podia optar per desenvolupar el Cangur com una activitat pròpia del centre o bé participar-hi com a concurs; aquesta segona opció va ser molt majoritària i a ella fan referència els nombres de participants que tot seguit es detallen.

---

---

**Nombre de participants en el concurs:** 93 868

(quantitat de concursants pujats a la base de dades.)

- Cangur de primària: 24 648 participants
  - Cangur de 1r, 2n i 3r d'ESO: 52 674 participants
  - Cangur de 4t i batxillerat i CF: 16 546 participant
  - Per zones geogràfiques:  
68 488 participants de la província de Barcelona (dels quals 21 108 de la ciutat de Barcelona);  
10 907 de la província de Girona; 3 871 de la província de Lleida; 10 571 de la província de Tarragona i 31 participants de la Franja de Ponent.
- 
- 
- 
- 

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de cinquè d'EP

---

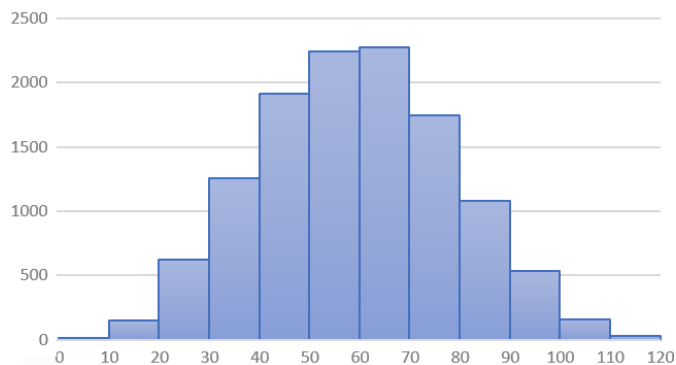
---

**Nombre de participants:** 12 304

**Nombre de centres que han participat en aquest nivell:** 376

---

Mitjana (sobre 120): 59,7 punts  
 Mitjanes de les puntuacions per terços:  
 20,7 + 21,4 + 17,5 punts  
 Puntuació del millor 1%: 102,5 punts  
 Puntuació del millor 6%: 90 punts  
 Puntuació del millor 10%; 85 punts  
 Tercer quartil, millor 25%: 73 punts  
 Mediana: 58,75 punts



## Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 8: encert 88,70 % ; error 7,45 %; en blanc 3,85 %

Problema amb el percentatge més gran d'error:

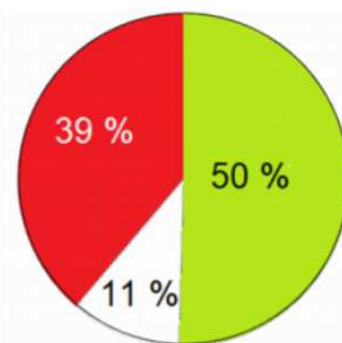
- Problema 23: encert 16,24 %; error 69,87 %; en blanc 13,89 %

Els problemes 1 i 17 (que és de 5 punts) han obtingut uns percentatges similars, potser sorprenents, pel tant per cent d'errors l'un i per tant per cent d'encert, l'altre:

- Problema 1: encert 55,62 %; error 37,55 %; en blanc 6,87 %
- Problema 17: encert 55,14 %; error 37,32 %; en blanc 7,54 %

## Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	68,13 %	51,39 %	31,82 %
error	26,96 %	37,41 %	52 %
en blanc	4,92 %	11,20 %	16,18 %





---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de sisè d'EP

---

---

Nombre de participants: 12 344

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 380

---

Mitjana (sobre 120): 53,2 punts

Mitjanes de les puntuacions per terços:

17,9 + 16,2 + 19,1 punts

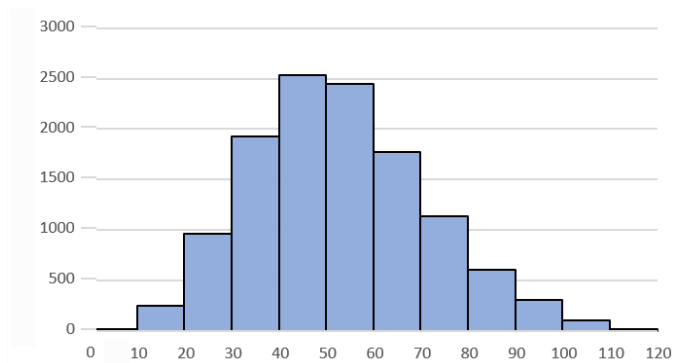
Puntuació del millor 1%: 100,75 punts

Puntuació del millor 6%: 84,5 punts

Puntuació del millor 10%: 78,5 punts

Tercer quartil, millor 25%: 64,75 punts

Mediana: 51,25 punts



### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 3: encert 86,37 %; error 11,88 %; en blanc 1,73 %

Problema amb el percentatge més gran d'error:

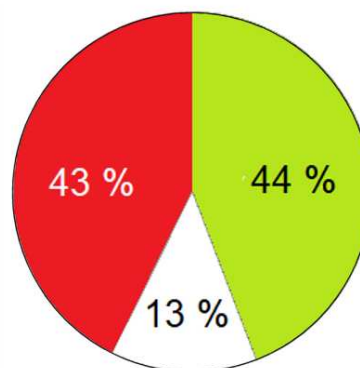
- Problema 11: encert 20,57 %; error 70,66 %; en blanc 8,74 %

Els problemes 8 i 24 (un de 3 punts, l'altre de 5) han obtingut uns percentatges similars:

- Problema 8 : encert 27,38 %; error 51,25 %; en blanc 21,34 %
  - Problema 24: encert 27,09 %; error 46,65 %; en blanc 26,24 %
- 

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	58,01 %	38,48 %	33,92 %
error	32,74 %	51,18 %	44,45 %
en blanc	9,22 %	10,31 %	21,50 %



---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de primer d'ESO

---

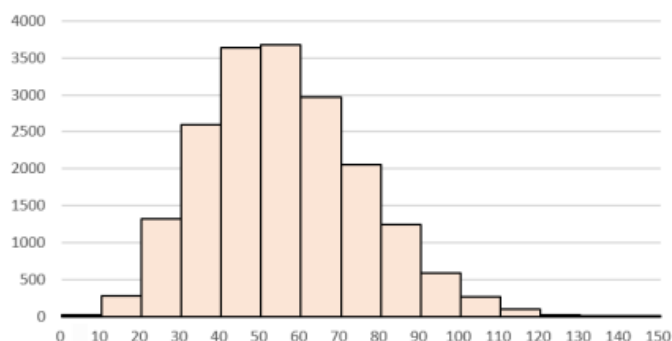
---

Nombre de participants: 19 345

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 475

Mitjana (sobre 150): 56,0 punts  
Mitjanes de les puntuacions per terços:  
20,9 + 16,6 + 18,5 punts

Puntuació del millor 1%: 106,25 punts  
Puntuació del millor 6%: 88,75 punts  
Puntuació del millor 10%: 82,25 punts  
Tercer quartil, millor 25%: 68,25 punts  
Mediana: 53,5 punts



---

### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 2: encert 92,57 %; error 5,51 %; en blanc 1,92 %

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 13: encert 25,24 %; error 68,17 %; en blanc 6,59 %

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 26: encert 7,09 %; error 64,50 %; en blanc 28,41 %

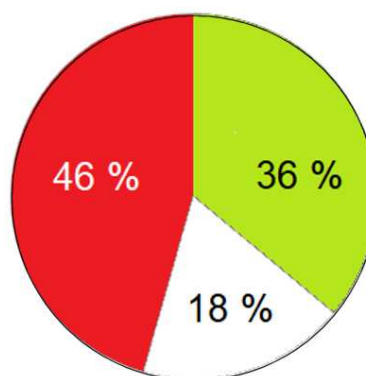
Problema que és una sorpresa pel baix percentatge d'encert:

- Problema 12 : encert 11,66 %; error 64,49 %; en blanc 23,85 %

---

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	54,30 %	29,72 %	24,10 %
error	37,17 %	51,32 %	48,29 %
en blanc	8,53 %	18,96 %	27,61 %



---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de segon d'ESO

---

---

Nombre de participants: 17 490

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 468

---

Mitjana (sobre 150): 51,6 punts

Mitjanes de les puntuacions per terços:

17,8 + 19,8 + 14,0 punts

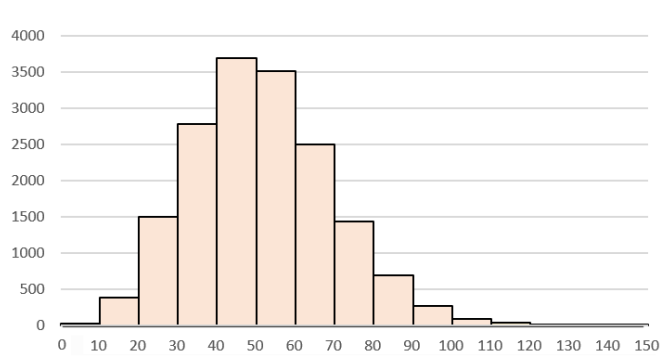
Puntuació del millor 1%: 98,25 punts

Puntuació del millor 6%: 80,75 punts

Puntuació del millor 10%: 75 punts

Tercer quartil, millor 25%: 62,5 punts

Mediana: 49,75 punts



### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema amb el tant per cent més alt d'encert i amb menys errors:

- Problema 1 : encert només del 69,1 %; error 23,2 %

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 2 : encert 37,26 %; error 56,59 %; en blanc 6,15 %

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

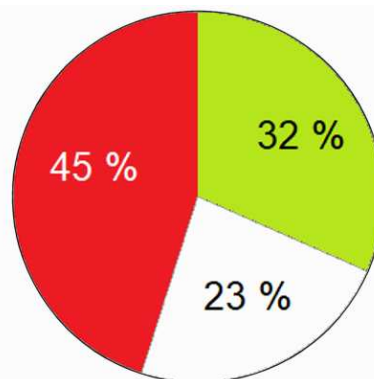
- Problema 17 : encert 63,96 %; error 29,62 %; en blanc 6,42 %

Els problemes 9 i 22 obtenen uns percentatges similars:

- Problema 9 : encert 26,32 %; error 49,02 %; en blanc 24,75 %
  - Problema 22: encert 25,49 %; error 45,60 %; en blanc 28,91 %
- 

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	44,25 %	35,91 %	14,65 %
error	41,30 %	45,31 %	48,64 %
en blanc	14,46 %	18,78 %	36,71 %



---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de tercer d'ESO

---

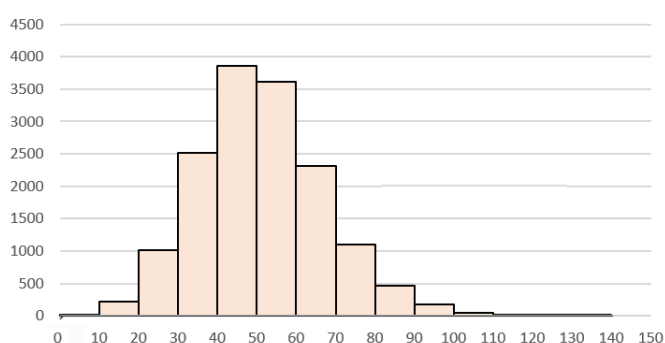
---

Nombre de participants: 15 839

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 482

Mitjana (sobre 150): 51,5 punts  
Mitjanes de les puntuacions per terços:  
23,1 + 14,5 + 13,9 punts

Puntuació del millor 1%: 94,25 punts  
Puntuació del millor 6%: 77,5 punts  
Puntuació del millor 10%: 72,0 punts  
Tercer quartil, millor 25%: 61,0 punts  
Mediana: 50,0 punts



---

### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 2 : encert 37,35 %; error 57,10 %; en blanc 5,56 %

Problemes amb els percentatges més petits d'encert:

- Problema 26: encert 6,75 %; error 53,82 %; en blanc 39,44 %
- Problema 28: encert 6,41 %; error 56,61 %; en blanc 36,98 %

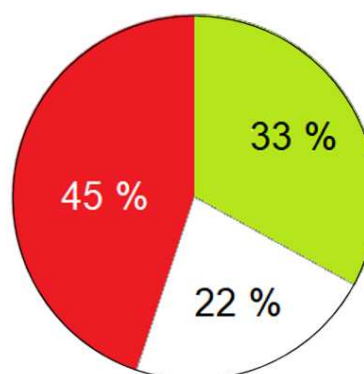
El problema 21 obté millors percentatges que el 8:

- Problema 8 : encert 29,41 %; error 53,86 %; en blanc 16,73 %
- Problema 21: encert 35,67 %; error 51,43 %; en blanc 12,89 %

---

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	59,67 %	24,27 %	15,04 %
error	31,82 %	52,61 %	50,39 %
en blanc	8,51 %	23,11 %	34,85 %



---

---

## XXVI Cangur de la SCM. Dades estadístiques de quart d'ESO

---

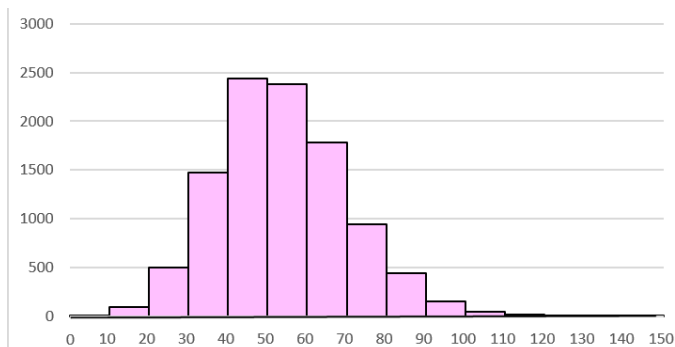
---

Nombre de participants: 10 619

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 437

Mitjana (sobre 150): 54,1 punts  
Mitjanes de les puntuacions per terços:  
24,4 + 14,5 + 15,2 punts

Puntuació del millor 1%: 97,55 punts  
Puntuació del millor 6%: 80,75 punts  
Puntuació del millor 10%: 76,25 punts  
Tercer quartil, millor 25%: 63,75 punts  
Mediana: 52,25 punts



---

### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 21: encert 4,93 %; error 66,92 %; en blanc 28,15 %

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 15: encert 15,44 %; error 67,64 %; en blanc 16,92 %

Problema que és una sorpresa pel baix percentatge d'encert:

- Problema 7 : encert 9,07 %; error 53,66 %; en blanc 37,27 %

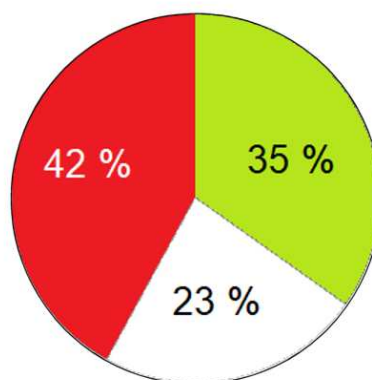
Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 23 : encert 46 %; error 38,22 %; en blanc 15,77 %

---

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	62,86 %	24,66 %	16,90 %
error	26,86 %	53,06 %	46,15 %
en blanc	10,27 %	22,28 %	36,95 %





---

---

## XXVI Cangur de la SCM.

### Dades estadístiques de primer de batxillerat

---

---

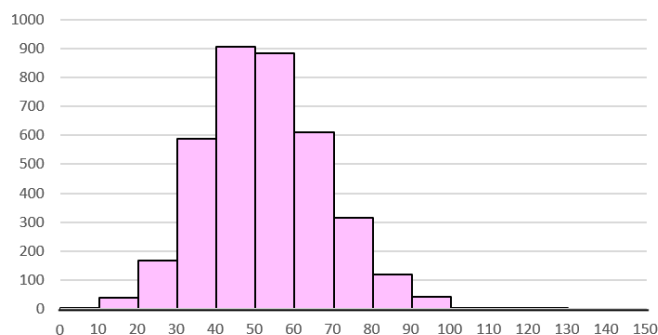
Nombre de participants: 3 772

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 265

---

Mitjana (sobre 150): 52,7 punts  
Mitjanes de les puntuacions per terços:  
22,9 + 16,1 + 13,7 punts

Puntuació del millor 1%: 92,5 punts  
Puntuació del millor 6%: 78,0 punts  
Puntuació del millor 10%: 73,25 punts  
Tercer quartil, millor 25%: 62,25 punts  
Mediana: 51,75 punts



---

### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

Problema que obté el percentatge més alt d'encert, més baix d'error i també més baix de respostes en blanc en el Cangur 2021:

- Problema 2 : encert 94,81 %; error 4,65 %; en blanc 0,54 %

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 26: encert 4,89 %; error 34,21 %; en blanc 60,89 %

Problema amb el percentatge més gran d'error:

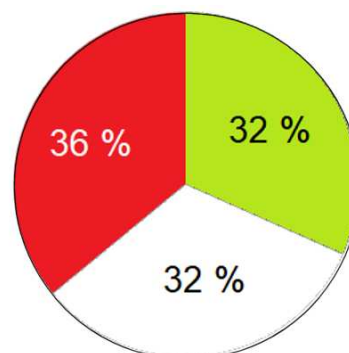
- Problema 12: encert 18,11 %; error 58,44 %; en blanc 23,45 %

Problema amb el percentatge més gran de respostes en blanc:

- Problema 28: encert 6,41 %; error 32,01 %; en blanc 61,58 %
- 

### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	58,12 %	25,26 %	11,57 %
error	28,67 %	40,74 %	38,43 %
en blanc	13,22 %	33,99 %	50 %



---

---

## XXVI Cangur de la SCM.

### Dades estadístiques de segon de batxillerat

---

---

Nombre de participants: 2 155

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 210

---

Mitjana (sobre 150): 45,6 punts

Mitjanes de les puntuacions per terços:

16,4 + 12,0 + 17,2 punts

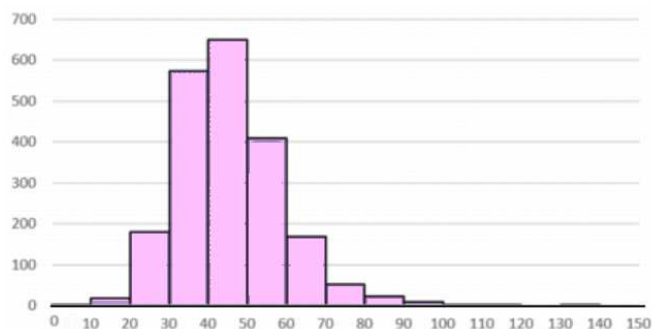
Puntuació del millor 1%: 85,0 punts

Puntuació del millor 6%: 66,25 punts

Puntuació del millor 10%: 61,5 punts

Tercer quartil, millor 25%: 53 punts

Mediana: 43,5 punts



---

### Anàlisi de les respostes a alguns problemes

En aquest nivell tenim el problema amb el percentatge més petit d'encert en el Cangur 2021:

- Problema 28: encert 4,10 %; error 31,35 %; en blanc 64,54 %

però també hi trobem un dels que ha tingut més encert:

- Problema 2: encert 93,0 %; error 8,1 %; en blanc, no arriba al 1 %

Problema també amb un percentatge molt petit d'encert:

- Problema 11: encert 4,98 %; error 60,44 %; en blanc 34,59 %

Problema amb el percentatge més gran d'error en el Cangur 2021:

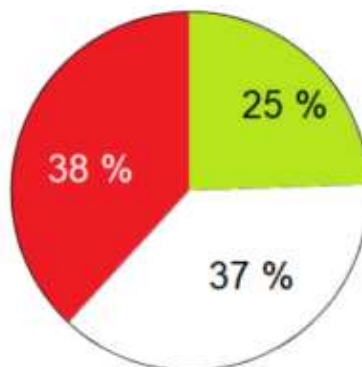
- Problema 19 : encert 22,01 %; error 71,09 %; en blanc 6,90 %

Els problemes 5 (de 3 punts) i 22 i 26 (que són de 5 punts) han obtingut uns percentatges similars d'encert, entre un 30 % i un 31 %.

---

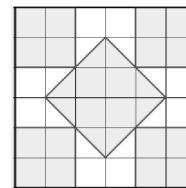
### Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	39,91 %	16,15 %	17,31 %
error	37,98 %	44,28 %	32,30 %
en blanc	22,10 %	39,57 %	50,39 %



# Idees clau per als puzles geomètrics de Catriona Agg

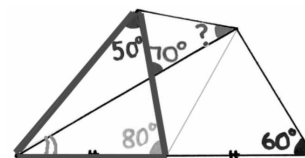
1. Imagineu la figura en una quadrícula. Comproveu que el quadrat central (reunió de dues zones acolorides) té efectivament àrea doble que cada un dels altres quadrats, com ha de ser, i deduireu de seguida la solució.



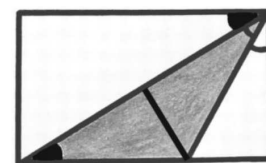
2. Talleu l'hexàgon per la meitat i col·loqueu les dues peces adossades. Què podeu deduir?



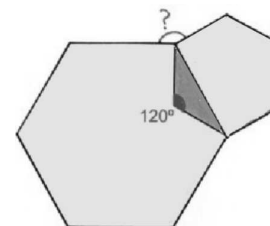
3. Deduïu que el triangle remarcat gruixut és isòsceles. Quant fa l'angle marcat amb doble traç? Mireu de localitzar un triangle que és mig triangle equilàter, un triangle equilàter i altres triangles isòsceles i podreu acabar el problema.



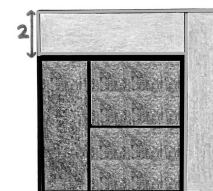
4. Quant fa cadascun del tres angles iguals de l'enunciat? Feu la perpendicular a la diagonal, penseu en un altre angle igual als de l'enunciat i comprovareu que hi ha tres triangles iguals que omplen mig rectangle.



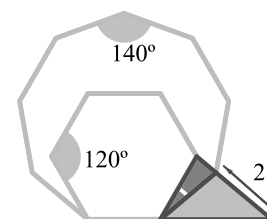
5. Heu de saber quant fa un angle d'un hexàgon regular. Aleshores, si us fixeu quina propietat té el triangle més fosc en podreu saber tots els angles i obtindreu la resposta al problema.



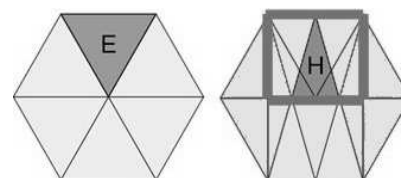
6. Compareu el rectangle del qual coneixem el costat 2 i el rectangle que s'ha enfosquit, que resulta de compondre tres dels rectangles inicials. Què veieu respecte les àrees? Què veieu respecte les bases? Què podeu deduir per a l'altura?



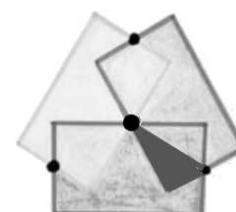
7. Penseu en la mesura dels angles dels dos polígons regulars per a deduir quant fa l'angle indicat en el triangle més fosc. Com que és isòsceles (ho veieu?) podreu deduir-ne els altres angles. Passeu a buscar els angles del triangle gris exterior als polígons i això us permetrà deduir la solució.



8. Quina és l'àrea d'un triangle **E**? Ara compareu-ho amb el rectangle remarcat gruixut, deduïu quina n'és l'àrea i penseu a quants triangles **H** equival. Si ho raoneu, podreu arribar a la solució del problema.

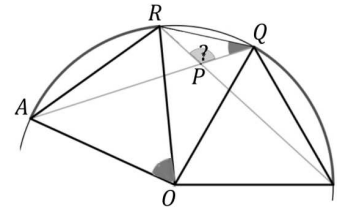


9. Quin us sembla que és el quart punt assenyalat? Aleshores el triangle enfosquit és la clau per a relacionar l'àrea dels rectangles amb l'àrea de la zona que cobreixen.

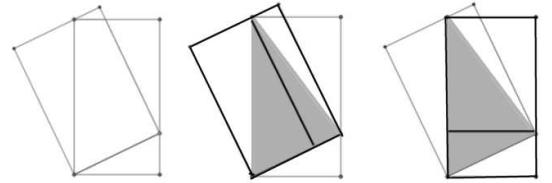


Cal conèixer una propietat que emprarem sovint: *Un angle inscrit en una circumferència mesura la meitat de l'angle central que correspon a l'arc que abasta.*

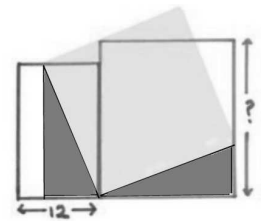
10. Traceu la circumferència de centre  $O$  i en la figura teniu marcat un angle en  $Q$  i l'angle central corresponent. Deduïu-ne els valors; feu el mateix per l'angle en  $R$ , i observeu el triangle  $PQR$ .



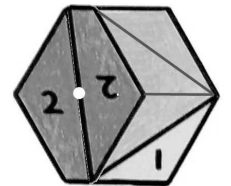
11. Mirem dos rectangles en la posició general dels que tenim en el problema: un vèrtex comú i un vèrtex de cada un en un costat de l'altre. Compareu el triangle gris primer amb un rectangle i després amb l'altre. Què deduiu?



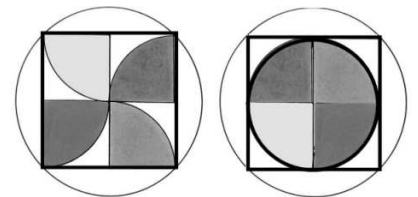
12. Els triangles enfosquits són iguals; compareu, doncs, l'altura del rectangle de l'esquerra i la base del de la dreta. L'àrea del quadrat és igual a l'àrea del rectangle de la dreta (vegeu el problema 11) i valen el doble que l'àrea del rectangle de l'esquerra. Ja ho teniu!



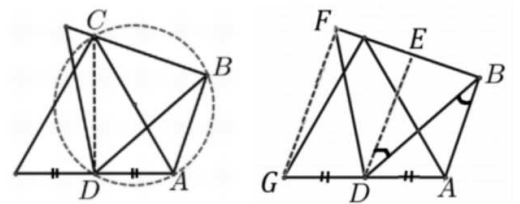
13. Feu una simetria central del quadrilàter d'àrea 2 respecte el punt mitjà del costat llarg i completeu la descomposició de l'hexàgon en triangles.



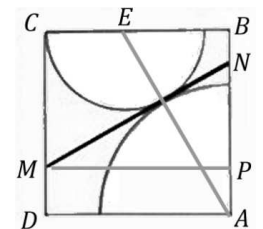
14. Reordeneu els quatre quadrants de cercle en el quadrat que formen els quatre punts que són de la circumferència. Penseu aleshores en la relació entre l'àrea del cercle inscrit i el cercle circumscrit a un quadrat.



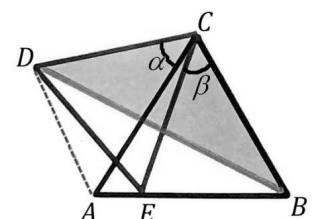
15. *Primera figura*) Els angles  $CAD$  i  $CBD$  són iguals i per tant els punts  $A, B, C$  i  $D$  determinen un cercle i ja podem pensar en la mesura d'un angle inscrit  
(*Idea alternativa*) Si tracem per  $D$  l'altura del triangle  $DBF$  el teorema de Tales ens diu que els segments  $AB, DE$  i  $GF$  són paral·lels i podreu reconèixer dos angles alterns interns.



16. Traceu el segment  $AE$ , perpendicular a la tangent comuna. Podeu saber quant mesura. Després vegeu que els triangles  $ABE$  i  $MPN$  són iguals.

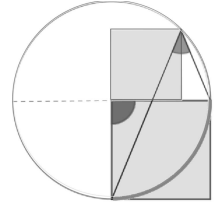


17. Els angles  $\alpha$  i  $\beta$  són iguals. Per tant també ho són els triangles  $CDA$  i  $CEB$  i es pot deduir que  $AD$  és paral·lela a  $BC$ ... i ara base  $\times$  altura / 2 per a l'àrea demanada comparada amb la dels triangles donats.

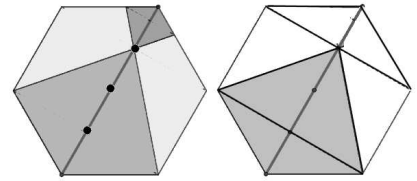


Respostes:  $120^\circ$ ; són iguals; 24; 5;  $\frac{2}{1}$ ;  $30^\circ$ ; 13; 5.

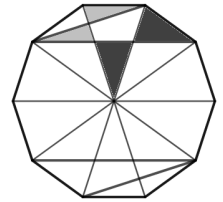
18. Penseu en la relació entre el costat del quadrat gros i la diagonal del petit i raoneu per què es pot fer la circumferència de la figura. Després: angle inscrit en una circumferència per a trobar la resposta.



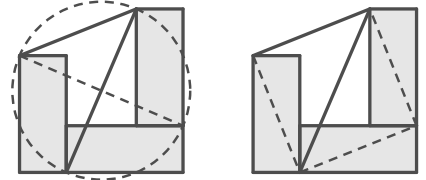
19. Els dos estels són semblants perquè els triangles que els formen tenen els angles iguals. Com que la raó d'àrees és 9, la raó de semblança és 3. Vegeu, doncs, que una diagonal gran de l'hexàgon queda dividida en aquesta proporció. Això vol dir que podem traçar dues diagonals petites de l'hexàgon com es veu a la segona figura i podrem comparar l'àrea de l'hexàgon amb la de l'estel gran.



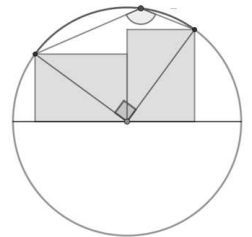
20. Podeu descompondre el decàgon en deu triangles iguals unint cada vèrtex amb el centre. Raoneu que els dos triangles de color gris són iguals; els dos triangles negres també, i això us permetrà arribar a la solució.



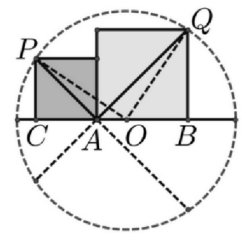
21. Traceu el segment marcat com a línia discontinua en la primera figura... i ja es comenta sola. En la segona figura, hi veieu un quadrat?



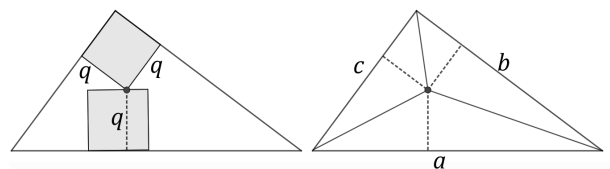
22. Un gir de  $90^\circ$  i centre el vèrtex comú dels rectangles transforma l'un en l'altre i ens mostra que el vèrtex comú és, justament, el centre de la circumferència. A partir d'aquí podreu raonar quin arc de la circumferència abasta l'angle demanat, que n'és un angle inscrit.



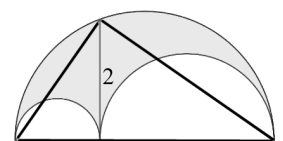
23. Podeu veure que, éssent  $O$  el centre del semicercle, els triangles  $PCO$  i  $OBQ$  són triangles rectangles iguals.



24. Quin punt especial del triangle és el que hem assenyalat? Si  $q$  és el costat del quadrat, el perímetre del triangle és  $a+b+c = 12q$  i l'àrea que cobreixen els dos quadrats és  $2q^2$ . Ara estudeu l'àrea del triangle, descompost en tres triangles com a la segona figura.



25. El triangle que veieu remarcat a la figura és un triangle rectangle. L'altura sobre la hipotenusa el descompon en dos triangles semblants. Si  $r$ ,  $R$  són els dos radis resulta  $\frac{2}{2r} = \frac{2R}{2}$ . Ja podreu deduir l'àrea demanada.

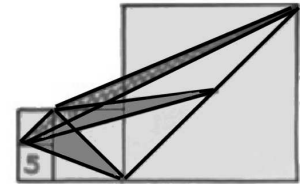


26. El teorema de Pitàgores permet relacionar el radi del semicercle gran amb els dels semicercles petits. Percentatges en les tres primeres figures: 50 %, 40 % i 30 %. Seguirà el 20%? Si en la quarta figura  $R$  i  $r$  són els radis, considerareu un triangle rectangle de costats  $R$ ,  $r$  i  $4r$ .

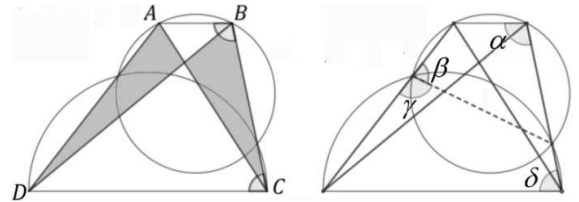
Respostes:  $45^\circ$ ;  $4\frac{5}{4}$ ;  $45^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  $64$ ;  $\frac{3}{1}$ ;  $\pi$ ;  $23,5\%$ .



27. Podeu deduir que els tres triangles dibuixats (i molts altres) tenen la mateixa àrea... i un dels que estan dibuixats és un triangle rectangle!



28. Com que ja coneixem la professora Catriona Agg, segur que imaginem que vol que deduïm que les dues àrees són iguals, cosa que equival a veure que  $AB$  és paral·lela a  $CD$ , és a dir que  $ABCD$  és un trapezi. Què hem de comprovar sobre els dos angles assenyalats?



En la figura de la dreta, relacioneu  $\alpha$  i  $\beta$  (angles oposats en un quadrilàter cíclic; podeu fer servir la propietat de l'angle inscrit); després  $\beta$  i  $\gamma$ ; finalment  $\gamma$  i  $\delta$  (un altre quadrilàter cíclic).

Respostes: 10 : són iguals.

## Il·lusions òptiques

Tenim el costum d'incloure en aquesta publicació anual la referència a algun material d'alguna de les entitats nacionals que formen part de *Le Kangourou sans frontières*. Enguany ho fem amb unes pinzellades de l'opuscle *Jeux d'illusions*, *ACL-les éditions du Kangourou*, una publicació de l'any 2018 de l'associació francesa, la que va idear i impulsar el Cangur tal com el coneixem. Si visiteu el **mmaca** (Museu de Matemàtiques de Catalunya) podreu revisar i aprofundir algunes de les experiències que tot seguit exposem.

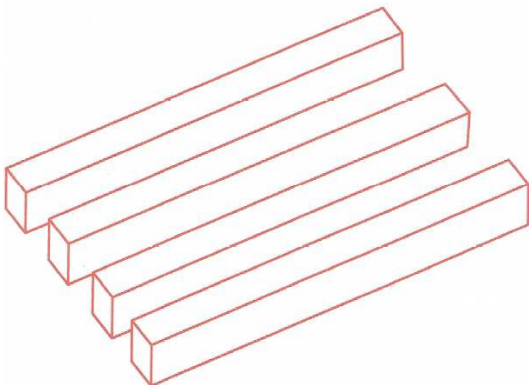
### Què és una il·lusió òptica?

En el diccionari de l'IEC podem llegir

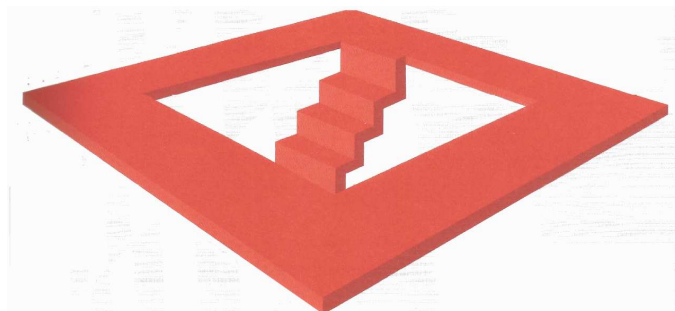
**il·lusió**. 1 1 f. [FS] [PS] [LC] Error dels sentits o de l'esperit que fa prendre per realitat l'aparença. *Una il·lusió òptica.*

**òptic** -a 1 adj. [LC] [ZOA] Relatiu o pertanyent a la visió, a l'ull, als fenòmens de la llum. *Nervis òptics. Il·lusió òptica. Eix òptic. Angle òptic.*

És a dir, que les il·lusions d'òptica (que més exactament en podríem dir «il·lusions de percepció visual») són falses interpretacions que ens dona el sentit de la vista: l'ull veu coses que en la realitat no existeixen o no són tal com les veiem. Mireu dos exemples:



En aquesta figura, hi ha representades quatre barres, o tres?



Una escala impossible.

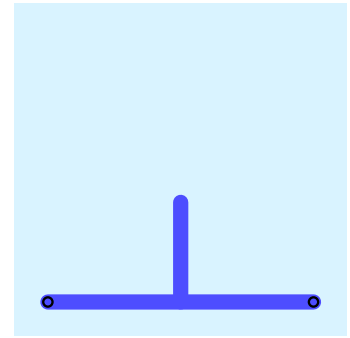
La segona de les imatges anteriors es pot entendre com una esquematització senzilla de dues situacions famoses, (l'anomenada *Escala infinita* de Penrose i *La cascada*, de M. C. Escher). Aquestes imatges ens porten a la reflexió següent: podem dibuixar objectes que no poden esdevenir reals?

## Il·lusions de longitud

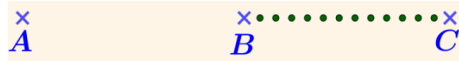
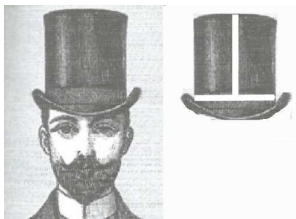
En la figura de la dreta, allargueu el segment vertical (sense mirar la graduació del regle, és clar), fins que us sembli que el segment vertical i el segment horitzontal tenen la mateixa longitud.

Tot seguit mesureu el segment horitzontal i el segment vertical i potser tindreu una sorpresa.

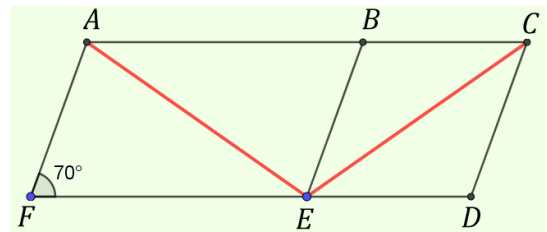
Aquesta situació s'anomena *il·lusió de FLICK* i s'explica pel fet que un segment vertical sembla més llarg que un segment horitzontal. És així que, moltes vegades, tot i que la barra horitzontal d'una lletra T té la mateixa mida que la barra vertical, aquesta sembla més llarga.



Teniu tot seguit una imatge, original del segle XIX, que s'emprava per a il·lustrar la il·lusió de Flick. Creieu que el barret és més ample o alt? Mesureu els dos segments blancs... i ja podeu passar a unes altres dues imatges que segurament també poden enganyar la vista.



És més llarg  $AB$  o  $BC$ ?



És més llarga la diagonal  $AE$  o la diagonal  $EC$ ?

En el primer cas potser us haurà enganyat la il·lusió dita d'OPEL KUNDT que fa pensar que un espai ple és més ampli que un espai buit.

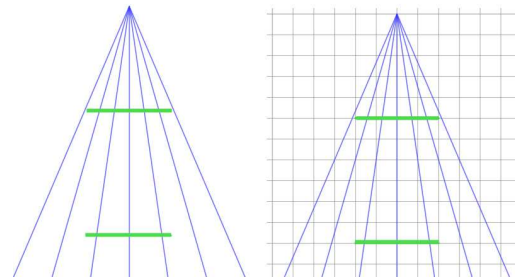
En el segon cas les mesures estan preses perquè les dues diagonals,  $AE$  en el paral·lelogram  $ABEF$ , i  $EC$  en el rombe  $BCDE$  siguin iguals. Pot ser que hagueu tingut aquesta idea, i que «a ull» us hagi semblat més llarga  $AE$  que  $EC$  (il·lusió de SANDER) perquè  $ABEF$  ocupa més espai que  $BCDE$ ... però  $AE$  és la diagonal curta de  $ABEF$  i en canvi  $EC$  és la diagonal llarga de  $BCDE$ .

## L'efecte de perspectiva

Si mireu la primera figura, quin dels dos segments verds us sembla més llarg?

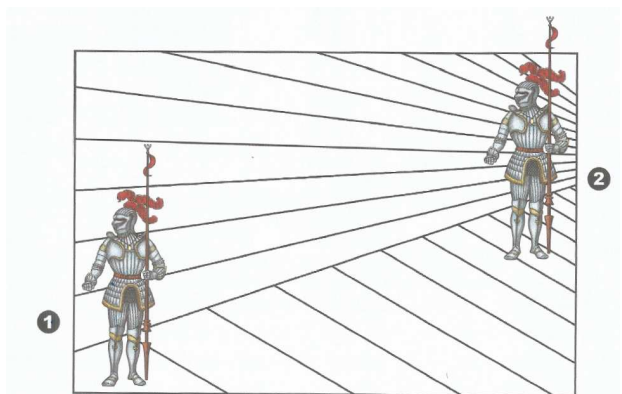
Però, de fet, la segona figura és la mateixa dibuixada en una quadrícula. Si l'analitzeu amb atenció, a quina conclusió arribeu?

Segurament heu patit l'anomenada *il·lusió de Ponzo* que ens explica que mireu la longitud dels segments situant-los en l'entorn que els envolta i aleshores imaginem la figura com si fos un disseny en perspectiva.



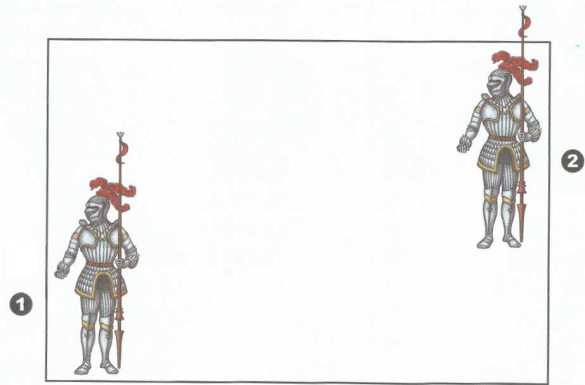
Un dels exemples més coneguts d'aquesta il·lusió de percepció visual és el que teniu en la imatge de la dreta.

Observeu els dos soldats; quin diríeu que és més gros en la figura? Penseu-ho... i ja podeu girar la pàgina.



Ara teniu la figura sense les línies de fons, les que provoquen l'efecte de perspectiva. Com ho veieu? Preneu un regle i mesureu cada soldat.

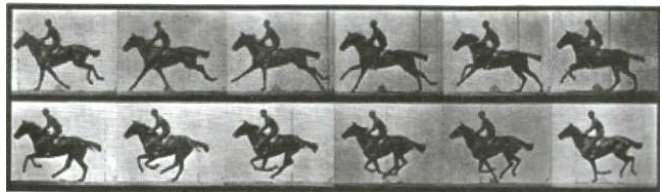
Com que en la imatge de la pàgina anterior el soldat 1 està situat sobre línies més espaiades que aquelles sobre les quals es veu el soldat 2, en aquella situació el cervell compara la mida efectiva de cada soldat sense abstrèure's del fons... i ens enganya.



## Il·lusions animades

*Hi ha algun moment, quan un cavall galopa, que cap de les seves quatre potes toqui a terra?*

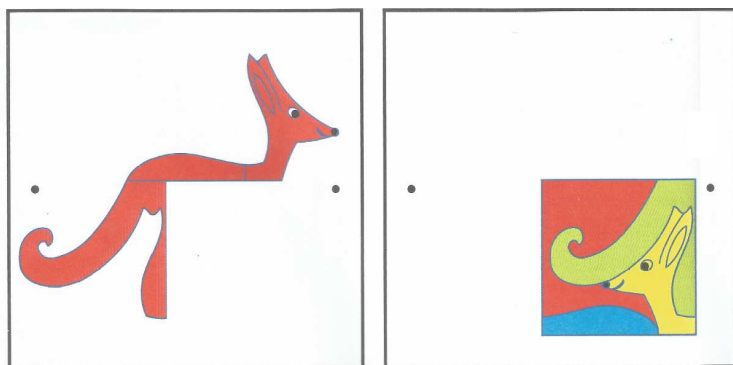
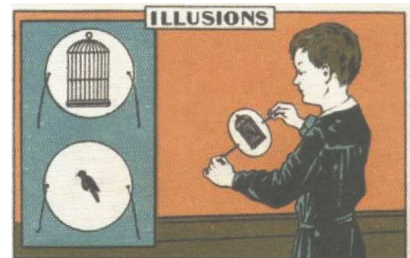
A partir d'aquesta pregunta, durant el segle XIX Eadweard Muybridge, un fotògraf anglès es va interessar en la descomposició fotogràfica del moviment.



El procediment que va emprar és simple: es tracta de prendre fotografies molt seguides en intervals ben curts i observar. Què respondríeu a la pregunta que encapçala aquest apartat?

A la recíproca, un bon nombre d'objectes han estat inventats per a recrear la il·lusió del moviment. Aquests aparells funcionen basant-se en el principi de la *persistència retiniana*: quan hom veu una imatge, la guarda en memòria un instant. Si un seguit d'imatges es mostren ràpidament, el nostre cervell recrea el moviment.

És ben cert que a partir d'aquests enginys va néixer la idea del cinema. El més senzill és el *taumàtrop*. En una planxa (de cartó, de metall o similar) es fixa una imatge per cada costat. Si es fa voltar molt ràpidament el disc, la persistència retiniana fa que es vegin les dues imatges superposades. La imatge de la dreta en mostra un dels primers models, popularitzat al segle XIX. Què es veurà quan fem funcionar el taumàtrop? Efectivament!!! Es veurà l'ocell a la gàbia!



Mireu, si creem un taumàtrop amb les dues imatges anteriors enganxades una al darrere de l'altra i el fem voltar, veurem el logotip de *Le Kangourou sans frontières* que es mostra a la pàgina del darrere de la coberta d'aquest opuscle. Ara us expliquem com el podeu construir.



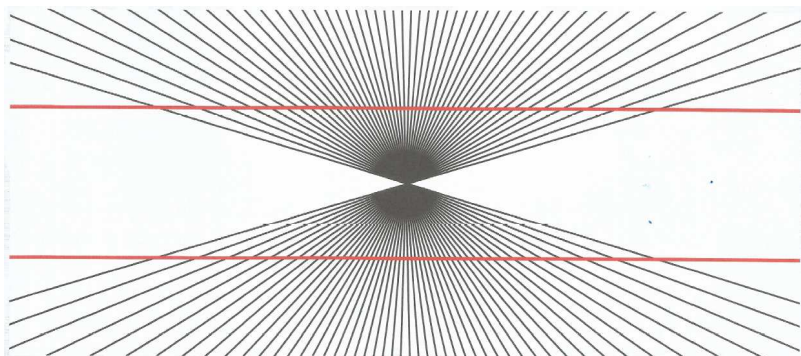
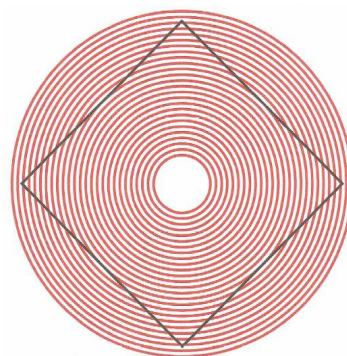
Haureu d'imprimir les dues imatges (que podreu descarregar amb bona resolució de [cangur.org/cang2021/](http://cangur.org/cang2021/)). En una planxa quadrada de cartó de la mida adequada enganxeu en cada cara una imatge, una col·locada en sentit invers de l'altra. Feu forats als punts negres de les imatges. Retalleu dos trossos de fil de goma (com el que va a les carpetes) d'uns 30 cm cada un. En feu passar un per cada forat i els feu un nus; estireu pels dos extrems; feu girar el cartró un munt de vegades... i quan el deixeu anar veureu el taumàtrop en funcionament. Que hi hagi sort!

## Il·lusions de línies corbes i paral·lelisme

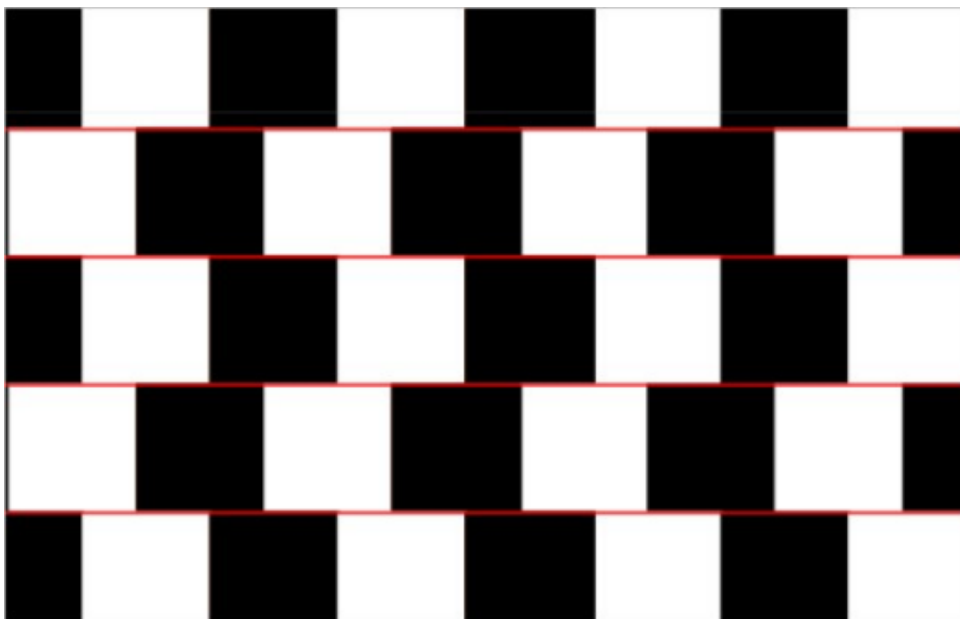
Acabem aquestes pinzellades del llibre *Jeux d'illusions*, ACL- les éditions du Kangourou amb unes darreres situacions en què possiblement tindrem falses impressions degudes a la superposició d'elements gràfics.

En la imatge de la dreta, quina és la forma de la figura negra? És un quadrat o els costats són arcs, línies amb una lleugera curvatura?

La mateixa pregunta per a les dues línies vermelles de la figura següent.



La darrera imatge que presentem rep el nom de la il·lusió «café wall» perquè en el cafè de Bristol que teniu a la foto, a mitjans dels anys 70, la gent es va començar a preguntar si les línies de morter que subjectaven horitzontalment les rajoles eren rectes paral·leles o no. Ho són?



## Agraïments





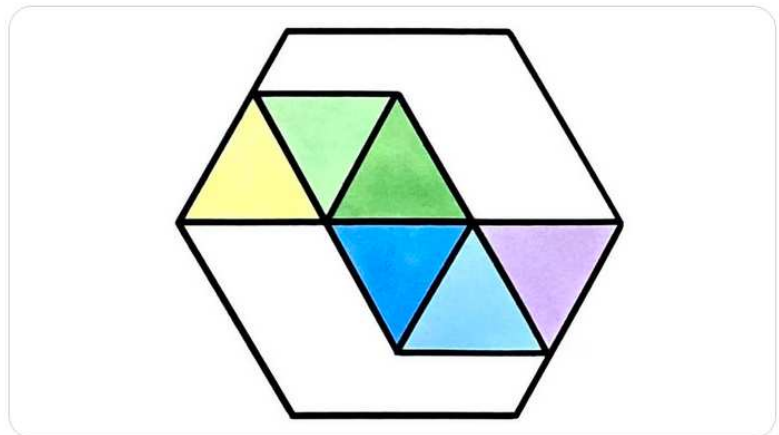


Construcció realitzable o il·lusió òptica?  
De la portada del llibre JEUX D'ILLUSIONS  
*ACL - les Editions du Kangourou*  
**Merci beaucoup pour votre travail!**



**Catriona Agg** @Cshearer41

What fraction of this regular hexagon do the equilateral triangles cover? ...



Un bolcat de pantalla del twitter de Catriona Agg  
Gràcies per la teva visió de la geometria!  
**Thank you very much!**

---

---

Una publicació de la comissió Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques

Juny de 2021

---

---