XLVII Olimpíada Matemàtica Activitat telemàtica prèvia
Novembre de 2010

Enunciats

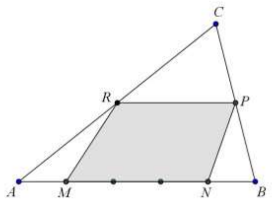
En els problemes indicats amb (*) es demanava un aspecte del raonament que portava a la solució.
El (**) era el que anomenem un “problema d’explicar”

Problema 0.

La mitjana d'un conjunt de sis nombres enters positius diferents es 2010. Si del conjunt en llevem el nombre més petit, la mitjana passa a ser 2011. Si dels cinc nombres restants en tornem a llevar el més petit, la mitjana passa a ser 2012. Si des quatre nombres restants en llevem el més petit, la mitjana passa a ser 2013. Quin és el màxim valor que pot tenir el nombre més gran del conjunt inicial?

Problema 1.

La figura mostra un triangle *ABC* en el qual el costat *AB* s'ha dividit en 5 parts. *M* i *N* són el primer i el darrer punt dels que defineixen la divisió és a dir que la longitud de *AM* i la longitud de *NB* són iguals a la 5a part de la longitud de *AB*. Els punts *P* i *R* són, respectivament, els punts mitjans dels costats *BC* i *CA*.
Quina fracció de l'àrea del triangle *ABC* representa l'àrea del quadrilàter *MNPR*?



Problema 2.

El nombre 4392 té la propietat que és divisible per cadascuna de les seves xifres, que són totes diferents. Ara et demanem que busquis un nombre de **set xifres diferents** que sigui divisible per cadascuna de les seves xifres.

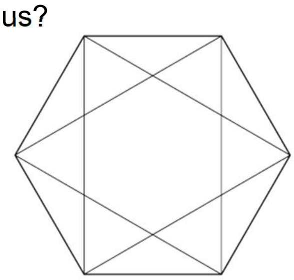
Problema 3.
Ja saps molt bé que per multiplicar dues potències no es fa pas multiplicant les bases i sumant els exponents però... alguna vegada pot ser veritat!
Calcula els valors de x que són solució de l'equació $3^{3x+1} \cdot 9^{9x+1} = 27^{12x+2}$

Problema 4 (*).

De quantes maneres es pot obtenir 2010 com a suma de nombres enters consecutius?

Problema 5.

L'àrea de l'hexàgon regular gran de la figura és de 10 unitats d'àrea.
Quina és l'àrea de l'hexàgon regular que queda determinat al seu interior quan tracem les sis diagonals que es mostren a la figura?



Problema 6 (*).

Trobeu tots els nombres naturals que:

- són quadrats perfectes
- escrits en base 10, tenen sis xifres, cap d'elles igual a 0
- compleixen la propietat que, si restem 1 a cada xifra, el nombre que en resulta (de sis o menys xifres) també és un quadrat perfecte.

Problema 7 (*).

Calcula, raonadament, quines són les quatre darreres xifres de 11^{2931}

Problema 8.

En una circumferència C_1 dibuixem dos radis que formen un angle de 60º. A l'interior del sector circular que així s'ha construït dibuixem una circumferència C_2 tangent als dos radis i a la circumferència inicial. Si l'àrea del cercle determinat per la circumferència C_1 és 45, quina és l'àrea del cercle determinat per C_2?

Problema 9.

Per quines ternes de nombres reals (a, b, c) el polinomi $x^3 - a\,x^2 + b\,x - c$ té arrels a, b, c (iguals o diferents)?

Problema 10 (**).

Raoneu quants triangles podem dibuixar que tinguin els tres vèrtexs en els vèrtexs d'un polígon regular de $2n+1$ costats amb la propietat que el centre del polígon regular sigui interior al triangle.

XLVII Olimpíada Matemàtica Activitat telemàtica prèvia
Novembre de 2010

Informació i resultats

• Per impulsar la participació en l'**Olimpíada catalana** es va convocar una fase prèvia, que s'ha desenvolupat per via telemàtica **durant el mes de novembre**.

- Es van inscriure 146 participants, dels quals més de 70 han enviat resposta a 4 problemes o més, dada que cal valorar molt positivament.
- Es van proposar 10 problemes de resposta concreta, alguns de 2 punts, o de 3 o de 4 punts, i per a tres es demanava una explicació raonada. A més es va proposar un darrer problema, de 7 punts, per al qual es demanava una explicació raonada i ben detallada.
- Examinades les puntuacions obtingudes la comissió de la SCM per a la 47a Olimpíada ha acordat:
    - Atorgar els tres premis de l'activitat a les persones participants amb les contrasenyes GT623JH i UT532LW que han obtingut la màxima puntuació possible, 43 punts, i JV759EG que ha obtingut 41,5 punts. Tots tres han enviat una solució excel·lent al problema 10.
    - Fer una menció especial de les persones amb les contrasenyes YU413CN i DT737YN que han obtingut més de 40 punts i també han fet molt bé el problema 10.
    - Publicar la relació amb els noms i puntuacions de les persones que han obtingut 30 punts o més.

Analitzat el fitxer que relaciona la contrasenya amb el nom de cada participant s'anuncia que:

Han obtingut premi en l'activitat telemàtica de la 47a Olimpíada Matemàtica a Catalunya:

- ex-aequo, **Eudald Romo i Grau**, alumne de 1r de batxillerat de **l'Institut Jaume Vicens Vives**, de Girona i **Eduardo Atao Salazar,** alumne de 1r de batxillerat del **col·legi Sagrat cor de Jesús, de Terrassa**, tots dos amb la màxima puntuació de 43 punts.
- **Jordi Vila Pérez**, alumne de 2n de batxillerat de **l'Institut Alexandre Deulofeu de Figueres**., amb 41,5 punts.

Es fa una menció especial de:

- Eduard Vázquez Espín alumne de 2n de batxillerat de l'Institut de Pallejà (41 punts) i Júlia Alsina Oriol**,** alumna de 1r de batxillerat de l'Institut Jaume Callís de Vic (40,6 punts).

Aquestes persones seran convidades a l'acte d'entrega de premis de l'activitat.
Rebeu la felicitació més cordial de part de la SCM.

Relació de participants amb puntuacions superiors a 30 punts. També els enviem la nostra felicitació, així com a tothom que ha gaudit una estona fent algun dels problemes.

Quim Monserrat, 2n de batxillerat. Terraferma (Alpicat) 38,6 punts
Marc Felipe i Alsina, 4t ESO. Bell-lloc del Pla (Girona) 37,2 punts
Darío Nieuwenhuis Nivela. 4t ESO. Aula Escola Europea (Barcelona) 37,2 punts
Sabina Sofia Higa Flores. Cicle formatiu Sup. Institut Salvador Seguí (Barcelona) 36,3 punts
Cristian Reyes Rodríguez. 2n de Batxillerat. Institut Pere Fontdevila (Gironella) 35,3 punts
Marc Ballbé Ferrero, 1r de batxillerat. Aula Escola Europea (Barcelona) 34,9 punts
Albert Mateu Sorribas, 4t ESO. Institut Pere Calders (Cerdanyola del Vallès) 34 punts
Eric Milesi Vidal. 1r de batxillerat. Col.legi Pare Manyanet (Barcelona) 33,4 punts
Jordi Barceló Mercader. 1r batxillerat. Jesús Maria (Sant Andreu. Barcelona) 33,2 punts
Martí Fernández-Real Girona. 4rt ESO. Institut Jaume Vicens Vives (Girona) 33 punts
Júlia Bozzino. 4t ESO. Institut Jaume Vicens Vives (Girona) 31,9 punts
Jie Luan. 2n batxillerat. IES Montsacopa (Olot) 30,4 punts