XLVI Olimpíada Matemàtica Activitat telemàtica prèvia
20 i 21 de novembre de 2009

Enunciats

Problemes de 3 punts

Problema 1.

Per quants valors de l'enter positiu n, resulta que $\dfrac{13n+2009}{n+12}$ és un nombre enter positiu?

Problema 2.
Sabent que x i y són dos nombres que compleixen $x + y = 30$ i que $x^3 + y^3 = 2700$, quant val $x^2 + y^2$?

Problema 3.
Es considera el conjunt de nombres C

$$\left\{10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{3}{10}}, 10^{\frac{5}{10}}, \ldots, 10^{\frac{2n-1}{10}}\right\}$$

Quin és el valor més petit de n per al qual el producte de tots els nombres de C és més gran que un bilió?

Problemes de 4 punts

Problema 4.
Un trapezi de 126 cm^2 d'àrea està circumscrit a un cercle de radi 7 cm. Quin és el perímetre del trapezi?

Aquest és un dels tres problemes dels quals se't demana el raonament detallat que t'ha portat a la solució.

Problema 5.
Una locomotora, quan viatja sense vagons, pot atènyer la velocitat de 120 km/h. Quan porta 4 vagons al darrere pot aconseguir la velocitat de 90 km/h. Suposant que la velocitat de la locomotora quan arrossega uns quants vagons disminueix en una quantitat proporcional a l'arrel quadrada del nombre de vagons, quants vagons com a màxim podria arrossegar aquesta locomotora?

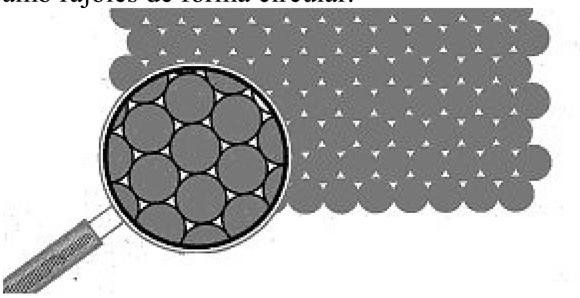
Problema 6.
Els vuit millors jugadors de tennis del món que, ordenats segons el rànquing, són A, B, C, D, E, F, G i H, han de disputar un torneig per eliminatòries (directes).
Es fa un sorteig aleatori (sense caps de sèrie) per decidir els enfrontaments en la primera eliminatória (quarts de final). Tot seguit es fa un altre sorteig entre els quatre que han guanyat per decidir quins partits es faran en les semifinals; naturalment els que guanyen les semifinals seran els que jugaran la final.
Suposant que els resultats de tots els partits estigués sempre d'acord amb el rànquing de la vàlua dels jugadors, quina és la probabilitat que la final la juguin A i B?

Problemes de 5 punts

Problema 7.
Trobeu la suma de tots els nombres capicues que tenen sis dígits en la seva expressió en base 10
(és a dir que són nombres naturals més grans que 100.000 i més petits que 1.000.000)

A) 494.495.000
B) 494.095.500
C) 745.433.205
D) 495.000.000
E) 495.049.500

Problema 8.
Una plaça molt gran s'ha enrajolat amb rajoles de forma circular.



Quin dels percentatges que s'indiquen a les opcions de resposta representa millor la superfície de la plaça que ha quedat realment coberta per les rajoles?
(S'ha de suposar que les rajoles són, relativament, *molt petites* en comparació amb la grandària de la plaça de manera que la forma de la plaça no intervé per a obtenir la resposta al problema tal com es planteja)

A) entre el 86% i el 89%
B) entre el 89% i el 92%
C) més del 92%
D) menys del 83%
E) entre el 83% i el 86%

Aquest és un dels tres problemes dels quals se't demana el raonament detallat que t'ha portat a la solució.

Problema 9.
Per a cada nombre real m es considera l'equació polinòmica

$$x^3 + (m-4)x^2 - 3(m-2)x + 1 = 0 \qquad [\#]$$

Indiquem com a, b, c les arrels (que depenen de m) de l'equació [#].
Busqueu el valor de m que fa que el nombre $a^2 + b^2 + c^2$ sigui el mínim possible.

Problema 10.
Siguin x, y, z tres nombres reals positius diferents que compleixen

$$x + \sqrt{y + \sqrt{z}} = z + \sqrt{y + \sqrt{x}}$$

Demostreu que $40xz < 1$.

D'aquest problema se't demana un raonament detallat que permeti demostrar que es compleix la desiguatat indicada.

XLVI Olimpíada Matemàtica Activitat telemàtica prèvia
20 i 21 de novembre de 2009

Informació i resultats

• Aquesta activitat va estar oberta des del dia **20 de novembre de 2009** a les 14 hores fins el dia **21 de novembre** a les 14 hores. Van participar 61 estudiants.

• La puntuació màxima que es podia assolir era de 50 punts.

- Es van proposar tres problemes de 3 punts, 3 problemes de 4 punts i tres problemes de 5 punts. Si s'enviaven correctament les respostes numèriques d'aquests problemes s'obtenien 36 punts.
- Es demanava el raonament que portava a la solució dels problemes 4 i 8. Aquestes explicacions es puntuaven, respectivament sobre 3 i sobre 4 punts.
- Finalment es demanava l'explicació del problema 10, que es valorava sobre 7 punts.

• Una vegada analitzades les puntuacions obtingudes en la tramesa de solucions numèriques i valorades les explicacions rebudes, la comissió de la XLVI Olimpíada, fase catalana, va acordar **atorgar dos premis** i publicar la **relació de participants que han superat els 38 punts**.

Els premis de la fase prèvia a Catalunya, celebrada per via telemàtica, de la XLVI Olimpíada Matemàtica corresponen a

- **Xavier Fernández-Real Girona**, alumne de 2n de batxillerat de l'IES Jaume Vicens Vives, de Girona
- **Eduard Vázquez Espín**, alumne de 1r de batxillerat de l'IES de Pallejà

Relació d'alumnes que han superat la puntuació de 38 punts

- Xavier Fernández-Real Girona, (2n BTX), IES Jaume Vicens Vives de Girona, 47 punts

- Eduard Vázquez Espín, (1r BTX), IES de Pallejà, 45 punts

- Ex-aequo amb 43 punts (indicats per ordre alfabètic):
  Ferran Alet Puig. (1r BTX), Aula Escola Europea, Barcelona
  Guillem Alsina Oriol, (2n BTX), IES Jaume Callís, Vic
  Júlia Alsina Oriol, (4t ESO), IES Jaume Callís, Vic
  Laura Cifuentes Fontanals, (2n BTX), Col·legi Llor, St Boi de Llobregat
  Adrià González Esteve, (2n BTX), Inst. Cultural del CIC, Barcelona
  Bru Martinell Chicano, (2n BTX), IES Jaume Vicens Vives de Girona
  Gerard Neras Lozano, (2n BTX), IES Jaume Vicens Vives de Girona
  Pere Planell Morell, (2n BTX), Aula Escola Europea, Barcelona
  Albert Villalobos i Guiral, (1r BTX), Aula Escola Europea, Barcelona

- Eric Milesi Vidal, (4t ESO), Col.legi Pare Manyanet de Les Corts, Barcelona, 40 punts

- Jordi Vila Pérez, (1r BTX), IES Alexandre Deulofeu, Figueres, 39 punts

---