

Projecte de la Real Academia de Ciencias, la FUNDACIÓN vodafone
la FEEMCAT i la Societat Catalana de Matemàtiques



Prova de selecció per al curs 2003-2004
Dissabte, 31 de maig de 2003

Informació important que has de llegir abans de començar a treballar

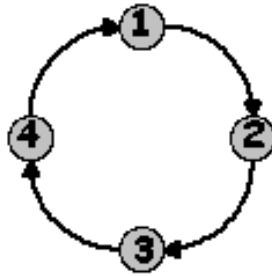
- En primer lloc has de llegir amb atenció tots els exercicis que et plantegem.
- Has de tenir molt en compte que no podràs escriure amb llapis i que no has d'utilitzar goma d'esborrar ni tippex. Si vols suprimir una cosa, hi poses una ratlla a sobre. Més endavant t'expliquem per què.
- No cal que facis els exercicis en l'ordre de la numeració. Pots triar l'ordre que et sembli millor i començar pels que et semblin més senzills.
- Tens dues hores en total. No has de gastar massa temps en un mateix problema. Un consell: no hi estiguis més de mitja hora seguida.
- Volem conèixer tots els camins que has seguit per a intentar arribar a la solució i no solament les solucions que has trobat per als problemes que has triat.
- Ens interessa que expliquis les idees que se t'han acudit per solucionar els problemes proposats. Intenta explicar aquestes idees de la manera més clara possible. Adona't, pel que hem dit fins ara, que no pensem que hagi de treballar tots els problemes i que, encara que et sembli que no has resolt completament un problema, et demanem que ens expliquis el camí que volies seguir. I també ens fixarem en aquelles coses que puguis haver pensat i hagis ratllat: en això s'hi troba, de vegades, molta informació interessant.
- Tens els enunciats dels problemes cadascun en un full. Aquest mateix full i el dels enunciats te'ls podràs endur i, per tant, no hi has d'escriure res. Tindràs fulls en blanc per escriure-hi la solució, els càlculs i els teus comentaris i un full auxiliar per al problema 6. En cada full que facis servir hi has d'escriure el teu nom, el número del problema i el número del full. (on pots escriure pel davant i pel darrere). Pots demanar tants fulls com et facin falta però, això sí, quan comencis a treballar un nou problema has de començar un full nou. **No posis en un mateix full solucions, càlculs i observacions de més d'un exercici.**
- Al final ens has d'entregar, numerats i ordenats, tots els fulls que hagis fet servir.

Et desitgem que t'ho passis bé fent problemes. Que et vagi molt bé!

Problema 1

Considerem els nombres 1, 2, 3, 4. Ordenem els quatre nombres de totes les maneres possibles formant en cada cas una anella i, en cada cas, multipliquem cada nombre pel que el segueix i calculem la suma dels resultats.

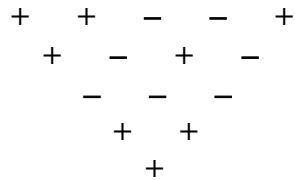
Tot seguit pots veure el dibuix de l'anella formada per 1, 2, 3, 4 (després del 4 torna a venir l'1) i aleshores tindrem: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 24$.



- A) Quina anella hem de formar amb aquests quatre nombres perquè la suma obtinguda sigui la més gran possible?
 - B) I si considerem els nombres de l'1 al 5?
 - C) Quina és la suma màxima que aconseguirem amb els nombres de l'1 al 10?
 - D) Com calcularies, en general, la suma màxima que es pot obtenir amb la col·lecció de nombres de l'1 al n ?
-

Problema 2

Observa la figura següent, formada per signes positius i negatius, disposats en forma de triangle:

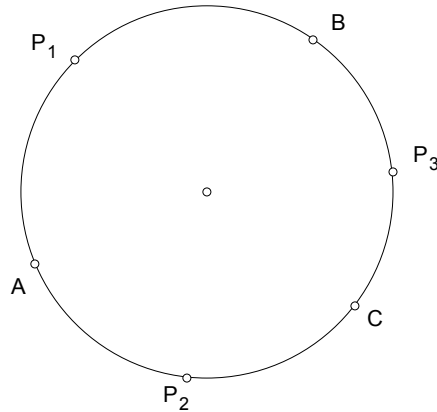


Per construir-la, primer hem escrit la primera línia posant-hi cinc signes, positius o negatius, en un ordre qualsevol. Després, per construir les files següents hem procedit així: si dos signes són iguals posem a sota d'ells (entre els dos) un signe +, i si els signes són diferents, posem a sota d'ells un signe - . Observa que a l'exemple tenim, en total, vuit signes positius i set de negatius.

- A) Construeix un triangle de signes positius i negatius seguint les mateixes regles que l'anterior però començant amb quatre signes a la primera línia de manera que el nombre total de signes positius sigui igual que el de signes negatius.
 - B) És possible trobar un triangle de signes com el de l'exemple, és a dir, començant amb una línia de cinc signes, de manera que tinguem el mateix nombre de signes positius i negatius? Per què?
 - C) Imagina que construïm un triangle de signes com els anteriors amb 14 signes a la primera fila. Serà possible que el tot el triangle el nombre de signes positius sigui el mateix que el nombre de signes negatius? I si a la primera fila hi ha 17 signes?
 - D) Si et donen un nombre qualsevol que indiqui la quantitat de signes que hi ha a la primera fila, pots donar algun procediment per a saber segur que no es pot construir un triangle de signes amb el mateix nombre de signes positius que de signes negatius?
-

Problema 3

Observa la figura següent

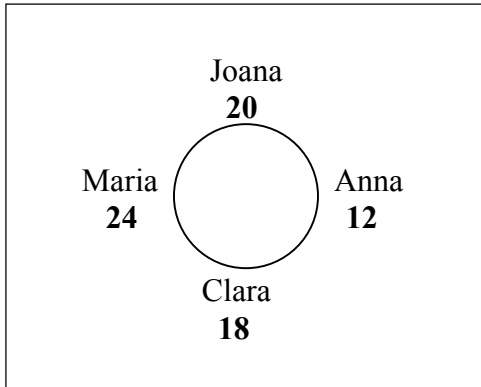


La circumferència té marcats tres punts A, B i C en el sentit de les agulles del rellotge. Marcarem uns altres 20 punts de la manera següent. Recorrem la circumferència en el sentit de les agulles del rellotge sortint de C. Passem per un punt marcat (A) i marquem P_1 en el punt mitjà de l'arc AB. Seguim recorrent la circumferència i després de passar per dos punts marcats (B i C) marquem P_2 en el punt mitjà de l'arc CA; després passem per tres punts marcats (A, P_1 , B) i marquem P_3 en el punt mitjà de l'arc BC. Seguim així, és a dir, després d'haver marcat, per exemple P_7 , i haver deixat enrera P_7 passem per 8 punts marcats i marquem P_8 en el punt mitjà de l'arc entre l'últim d'aquests 8 punts i el següent que ja està marcat. Per acabar, després de marcar P_{19} passem per 20 punts marcats i marquem P_{20} en el punt mitjà de l'arc que correspongui.

- A) Marca $P_4, P_5, P_6, P_7, \dots$. Tracta d'endevinar alguna pauta que et permeti decidir quants punts van a parar a cada arc: BA, AC, CB.
 - B) Quan s'hagin marcat els 20 punts, quants punts es marquen en cada arc BA, AC, CB?
 - C) I si en lloc de 20 punts en marquem 200, quants punts es marquen en cada arc BA, AC, CB?
-

Problema 4

La Maria té 24 cromos, la Clara en té 18, la Joana en té 20 i l'Anna en té 12. S'asseuen formant un cercle, tal com indica la figura., i fan **simultàniament** la jugada següent:



Cadascuna d'elles dóna la meitat dels seus cromos a la companya que està asseguda a la seva esquerra. Després d'això, si alguna té un nombre imparell de cromos posa un cromo al centre del cercle. **Una jugada** consisteix a fer aquestes dues operacions (donar-ne la meitat i després posar un cromo al centre si se'n té un nombre imparell).

El **joc** consisteix a fer jugades, tantes com siguin necessàries, fins que totes quatre tinguin el mateix nombre de cromos. Llavors s'acaba el joc.

- A) Et sembla que aquest joc s'acabarà mai? Quants cromos li quedaran a cada jugadora si el joc s'acaba? Quants cromos quedaran en el centre del cercle?

Ara hi ha més persones jugant, en total 12, també assegudes en un cercle. Qui té menys cromos és en Màrius, que en té 10, i el qui en té més és en Jordi, que en té 50. Tots els altres jugadors i jugadores tenen un **nombre parell** de cromos entre 10 i 50.

- B) Raona perquè ningú no pot tenir menys de 10 cromos en cap moment del joc.
- C) Raona perquè en Jordi no pot tenir més de 48 cromos després de la primera jugada.
- D) Et sembla que el joc s'acabarà? Quin raonament fas per a arribar a la teva resposta?
-

Problema 5

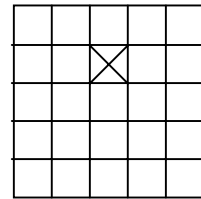
Tinc una calculadora que només té les tecles dels números, la d'engegar/parar i dues més, una amb una D, i l'altra amb una R. Quan premo la D, el número que està a la pantalla passa a ser el doble; quan premo la R, desapareix l'última xifra del número que està a la pantalla (si aquest és d'una sola xifra i premo R, es manté el número tal com estava).

Per exemple, si a la pantalla hi ha el 123 i premo DR, apareixerà 24 (la D fa sortir el 246 i després la R fa sortir el 24). Si hi ha un 7 i premo RRRRRD, apareixerà el 14 (cada una de les 5 vegades que he premut la R no canvia el número).

- A) A la pantalla hi ha el 45. Escriu una llista de D i R per tal que aparegui a la pantalla el número 1.
 - B) A la pantalla hi ha el número 1. Escriu una llista de D i R per a arribar al número 19.
 - C) Començant amb el 9872, escriu una llista de D i R per arribar al número 1.
 - D) Començant amb un nombre enter positiu qualsevol explica com arribaries a obtenir un número 1.
 - E) Ara traiem la tecla D i la substituïm per una tecla, C, que el que fa és elevar al quadrat el número de la pantalla. Amb la nova calculadora (la que té la tecla R i la tecla C) hi ha alguns nombres des dels qual mai no arribarem al 2: digues quins són. Explica també com pots arribar al 2 des de qualsevol dels altres nombres.
-

Problema 6

En un tauler quadrat 5×5 com el que et mostrem hem bloquejat una casella, i amb peces



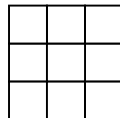
volem cobrir les altres caselles, sense deixar forats i sense que les peces s'encavallin.

(Pots col·locar la peça sobre el tauler com vulguis, fins i tot girada).

(A) Explica'ns per què no ho pots fer.

Podràs aconseguir-ho bloquejant una altra casella?

(B) Mira ara el tauler 3×3



Justifica que mai podràs cobrir-lo, sigui quina sigui la casella bloquejada. A quins altres taulers passarà el mateix, és a dir, que no podràs cobrir-los mai sigui quina sigui la casella que bloquegis?

(C) Naturalment, sempre es pot cobrir un tauler 2×2 amb una sola peça, sigui quina sigui la casella bloquejada. Basant-te en aquest fet, raona per què sempre es pot cobrir un tauler 4×4 , independentment de la casella bloquejada, i llavors també un tauler 8×8 . Escribeu en un full apart els teus raonaments, que han de ser vàlids sigui quina sigui la casella bloquejada. Indica com cobriries el tauler 16×16 de sota amb la casella bloquejada que et donem.

