

PROBLEMES A L'ESPRINT de BATXILLERAT (6 de febrer de 2019)

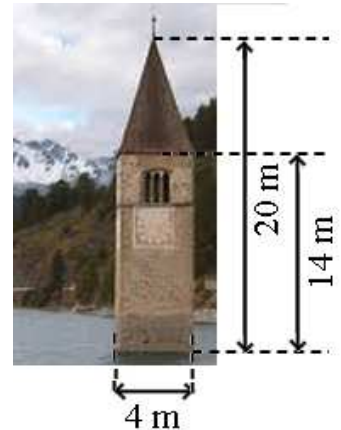
PRIMER GRUP DE PROBLEMES

1. Una nau espacial surt de la Terra cap a un planeta situat a 2^{20} km. Quan ha fet exactament la quarta part del trajecte, la nau perd el contacte per ràdio amb la Terra i no el recupera fins que ja ha viatjat 2^{19} km. Quants quilòmetres ha viatjat la nau sense contacte amb la Terra?

La resposta es pot escriure com una potència de 2, d'exponent enter. Al formulari de resposta haureu de posar el valor de l'exponent. Aquest exponent és un nombre, que passa al problema 7 com a nombre R .

2. En la foto adjunta d'un campanar (submergit en un embassament, als Alps italians, a prop de Bolzano) hem deduït les mesures aproximades que hi podeu veure: la de l'alçària visible total, 20 m; la de l'alçària visible fins a la base de la teulada, 14 m, i la de la longitud del costat de la planta quadrada, 4 m. Considerarem que la teulada és una piràmide regular de base quadrada, de costat 4 m. Amb aquestes dades, quina podem deduir que és la superfície total de la teulada?

La resposta es demanarà exacta i en m^2 . Es pot escriure com $m \cdot \sqrt{n}$ per a dos nombres enters m, n . Caldrà enviar els valors de m, n amb el mínim valor possible de n .



3. (Ve un nombre S , la solució del problema 5)

S'escriu una successió de fraccions tal com es mostra a la figura següent:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \dots$$

Quin és el numerador de la fracció que ocupa el lloc S en aquesta llista?

4. Quin és el màxim nombre de xifres que pot tenir un nombre natural amb la propietat que totes les seves xifres són diferents i que cada tres xifres consecutives d'aquest nombre sumen un múltiple de 5?

La resposta passa al problema 9 com a nombre k .

PROBLEMES DEL SEGON GRUP

5. Considerem que a i b són dos nombres enters positius que compleixen que $1, a, b$, en aquest ordre, formen una progressió geomètrica i que $a-3, b, 2019$, també en aquest ordre, formen una progressió aritmètica. Quin és el valor de $a + b$?

La resposta passa al problema 3 com a nombre S .

6. Si x, y, z són tres nombres enters positius que compleixen
 $x \cdot y \cdot z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x + y + z = 1000$,
quin és el valor de $x + y + z$?

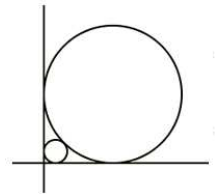
7. (ve un nombre R del problema 1)

Calculeu la suma de tots els nombres naturals n , més petits que R , per als quals no existeix cap nombre factorial que acabi exactament en n zeros.

Els nombres factorials són els del tipus $j! = j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ per a cada nombre natural $j \geq 2$

8. Dos cercles són tangents entre ells i a dues rectes perpendiculars, com es pot veure a la figura. Si el radi del petit fa 1 cm, quina és la mesura del radi del cercle gros?

La resposta es pot posar com $p + q\sqrt{r}$ per a tres nombres naturals, p, q, r , que seran els que es demanaran en el formulari, per al mínim valor possible de r . Els valors de p, q, r passen al problema 9

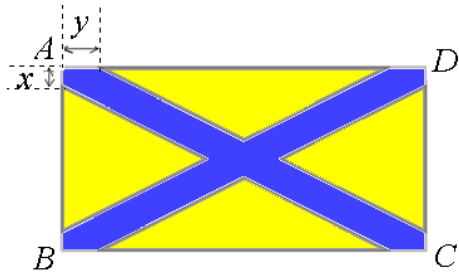


PROBLEMES DEL TERCER GRUP

9. (ve un nombre d'una xifra, k , del problema 4 i també venen tres nombres d'una xifra cada un, p, q, r del problema 8. Formem el nombre de sis xifres $U=kpqrkr$)

Esbrineu quin és el nombre enter N amb la propietat següent: si escrivim el nombre M que podem simbolitzar $M = kNk$ (és a dir que M s'obté afegint una xifra k al davant i la mateixa xifra k al darrere de N , i k és la xifra que ve del problema 4), aleshores la diferència $M - N$ és, justament, U .

10. El diagrama (que no està dibuixat a escala), representa una bandera formada per un rectangle $ABCD$ i una aspa. Els dos braços de l'aspa tenen la mateixa amplada i les seves vores són paral·leles a les diagonals AC i BC .



Sabem que el color groc representa el 64% de l'àrea total del rectangle. Quines seran les longituds x i y en una representació d'aquesta bandera feta en un rectangle que té longituds dels costats $AB = 40$ i $BC = 60$?