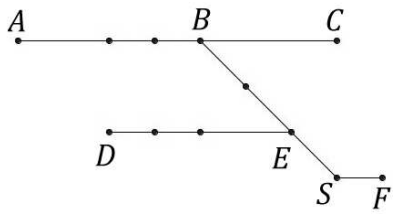
Problemes a l'esprint. 3r i 4t d'ESO

9 de desembre de 2015

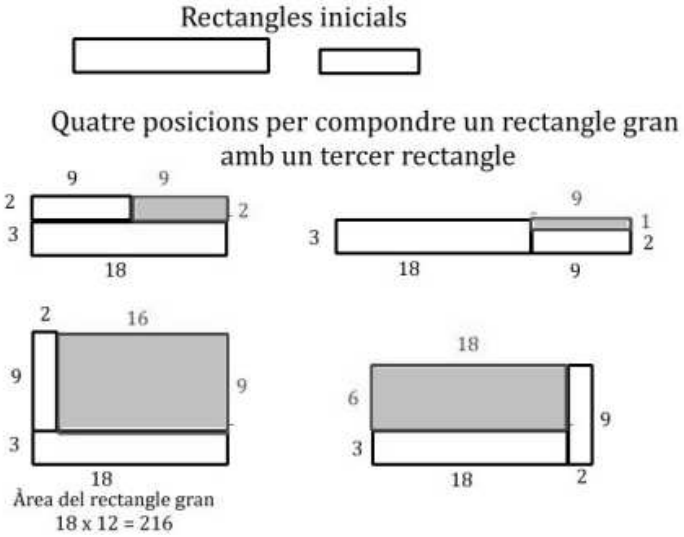
Solucions comentades

1. Solució: 3.



Amb els rètols que hem posat a les estacions a la figura adjunta, és clar que el trajecte BE s'haurà de fer segur. Aleshores es veu que, a més, tant des de B com des de E haurem d'anar i tornar com a mínim a una de les estacions extremes (des de B a A o a C i des de E a D o a F). Per tant, B i E es repeteixen segur. La manera de repetir el mínim nombre d'estacions serà que els trajectes "d'anada i tornada" que fem siguin des de B a C i des de E a F. Així en total només repetirem 3 estacions. Un exemple d'itinerari que repeteix només 3 estacions és $D-E-F-E$ (es repeteixen S i E) i seguir cap a $B-C-B$ (es repeteix B i cap altra estació) i acabar de B a A.

2. Solució: 216.



3. Solució: 39 vegades.

El valor de Q és $Q = 12$.

Suposarem que l'àvia i el nét corren a velocitat constant. Aquesta suposició no afecta la solució del problema.

Com que l'àvia camina a 4 km/h i el nét corre a 12 km/h, per cada volta que fa l'àvia el nét en fa exactament 3. Per tant per cada volta de l'àvia es trobaran 3 vegades durant la volta i una altra al final de la volta; en total 4 vegades per cada volta de l'àvia. Com que l'àvia fa 4 km, que són 10 voltes, es trobaran en total 40 vegades, però com que segons l'enunciat s'ha de descomptar "l'abraçada final", la resposta és 39.

Una alternativa és plantejar una equació que ens doni cada quant de temps s'encreuen àvia i nét, és a dir que entre tots dos fan 400 m. Posarem aquest temps t, mesurat en hores. Ha de ser $4t + 12t = 0,4$ i d'aquí resulta $t = \dfrac{1}{40}$ d'hora. Per tant en una hora s'encreuen 40 vegades, comptant també l'última i, doncs, la resposta és 39.

4. Solució: 41.

Si considerem els nombres 2, 3, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$ i $21 = 3 \cdot 7$ veiem que el producte de tots és $P = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ idò el producte dels nombres de cada subconjunt ha de ser $p = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Els dos nombres que tenen el 7 (el 14 i el 21) han d'anar a diferents subconjunt i igualment passa amb els dos que tenen el 5 (el 15 i el 20). Si posem el 21 i el 20 en el mateix subconjunt els podem completar així: 21, 20, 3, 2 i 15, 14, 12 i la suma demanada és 41. En canvi si posem el 21 i el 15 en el mateix subconjunt veurem que no podem repartir adequadament els 2 i els 3.

---

5. Solució: 12.

Es pot veure que d'un quadrat a l'altre el perímetre augmenta 8 unitats. Els perímetres són, doncs, 4, 12, 20, 28, ... i es pot sumar "a mà" aquesta progressió i veiem que no arriba a 600 amb els 12 primers termes $4 + 12 + 20 + 28 + 36 + 44 + 52 + 60 + 68 + 76 + 84 + 92 = 576$ i amb el següent quadrat ja passem de 600, la màxima longitud permesa.

Naturalment si en comptes de 600 fos un nombre molt més gran hauríem de treballar amb les fórmules de la progressió aritmètica. El terme general és $a_n = 4 + 8 \cdot (n-1) = 8n - 4$. La suma dels n primers termes és $S_n = \dfrac{4 + 8n - 4}{2} \cdot n = 4n^2$ i com que ha de ser $S_n \leq 600$ però $S_{n+1} > 600$ deduïm que ha de ser $n = 12$.

Una altra manera, ben interessant, d'arribar a aquest mateix resultat és veure que si dividim per 4 els termes de la progressió que considerem ens queda la successió dels nombres imparells 1, 3, 5, 7, ... Convé saber que la suma dels n primer nombres imparells positius dóna el quadrat perfecte n^2. És a dir que retrobem que la suma dels perímetres dels n primers quadrats del problema és $4n^2$.

---

6. Solució: 7.

Traduïrem textualment l'enunciat a una equació de primer grau amb la variable T, total de la donació. La primera rep: 4000 més 1/9 del que quedava després de rebre els 4000. Com que quedava $T - 4000$ la primera haurà rebut $4000 + \dfrac{T - 4000}{9} = \dfrac{T + 32000}{9}$.

La segona: ha rebut 6000 més 1/9 del total inicial menys la part de la primera i menys els seus 6000. És a dir que la segona ha rebut $6000 + \dfrac{T - \dfrac{T + 32000}{9} - 6000}{9} = \dfrac{8T + 400000}{81}$.

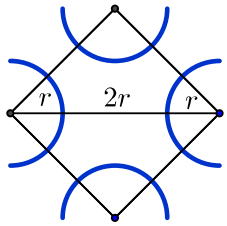
Com que els diners es reparteixen a parts iguals s'ha de complir $\dfrac{T + 32000}{9} = \dfrac{8T + 400000}{81}$.

Resolem aquesta equació i trobem $T = 112000$ €. Amb aquest valor podem deduir que la part de cada ONG és $\dfrac{T + 32000}{9} = \dfrac{8T + 400000}{81} = 16000$ € i que han estat $\dfrac{112000}{16000} = 7$ ONG a repartir.

---

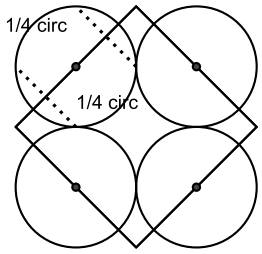
7. Solució: 15 cm.

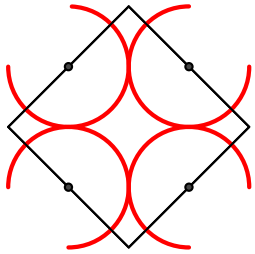
Pel valor de $S = 3$ que ve del problema 1 resulta que les diagonals del quadrat de la figura fan $\dfrac{6}{\pi}$ cm.



Si ens fixem en els quatre arcs amb centre en els vèrtexs del quadrat, veiem que són quatre semicircumferències. Això ens permet deduir que el seu radi (i per tant el de tots els arcs de la figura) és la quarta part de la diagonal del quadrat, és a dir $r = \dfrac{3}{2\pi}$ cm.

Els altres quatre arcs, de centre en els punts mitjans dels costats del quadrat, formen part de quatre circumferències tangents (i aquest fet també ens permetria deduir quin n'ha de ser el radi). L'anàlisi de la figura ens permet deduir que cadascun d'aquests arcs abasta tres quarts de circumferència.

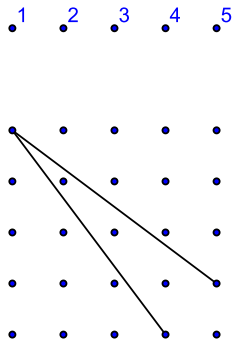




Així doncs, el perímetre de la figura que interessa el formen $4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 5$ circumferències de radi $\frac{3}{2\pi}$ i la longitud total és, doncs, $L = 5\dot{2}\pi\frac{3}{2\pi} = 15$ cm.

---

8. Solució: 108.



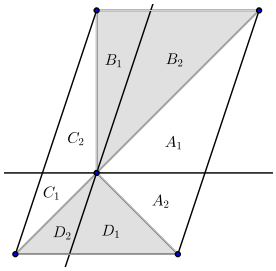
És clar que cada punt queda a una distància entera dels altres que estan en la seva mateixa fila. Si els numerem 1, 2, 3, 4, 5 això ens dóna 10 parelles, a saber (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) i (4,5). És clar que aquest nombre de parelles també el podem determinar sense escriure-les si coneixem els nombres combinatoris, en aquest cas $\binom{5}{2}$ per comptar quantes parelles hi ha de dos nombres diferents a triar entre 5.

Això mateix succeeix per a les cinc files i les cinc columnes. Per tant fins ara ja tenim $10 \cdot 10 = 100$ parelles.

Per a punts que no estiguin en la mateixa fila o en la mateixa columna l'única possibilitat en aquest geoplà rau en trobar punts a distància 5, que determinin la hipotenusa d'un triangle rectangle que tingui com a longitud dels catets 3 i 4. Hi ha dos punts a distància 5 de cada vèrtex del quadrat exterior. Així doncs tenim 8 parelles més i en total en seran $100+8 = 108$.

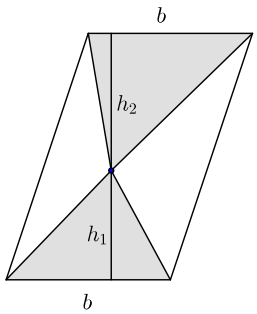
---

9. Solució: 3 unitats.



Si pel punt interior tracem paral·leles als costats del paral·lelogram el dividim en vuit triangles. Aquests vuit tirangles són iguals dos a dos perquè cada parella correspon a un paral·lelogram dividit en due smeitats iguals per la seva diagonal. Tenim, a la figura $A_2 = D_1$, $D_2 = C_1$, $C_2 = B_1$ i $B_2 = A_1$ i, per tant la suma de les àrees dels triangles acolorits és igual a la suma de les àrees dels triangles no acolorits.

Aleshores en el problema que ens ocupa es dedueix que Àrea de B+Àrea de D =Àrea de A+ Àrea de C. Com que els valors que venen d'altres problemes són Àrea de $B = 8$ i Àrea de $C = 5$, i tenim Àrea de $A = 6$, se'n dedueix que l'àrea de D és 3 de unitats d'àrea.



Una opció alternativa, per si a algú li agraden més les fórmules que la demostració visual que hem transcrit. A la figura de la dreta indiquem com b la base del paral·lelogram. Les altures sobre aquestes bases dels dos triangles acolorits són h_1 i h_2 que compleixen $h_1 + h_2 = h$, on h és l'altura del paral·lelogram. La suma de les àrees dels dos triangles acolorits és $S = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} = \frac{b \cdot (h_1 + h_2}{2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{P}{2}$, si P és l'àrea del paral·lelogram. Semblantment es pot deduir per als dos triangles no acolorits en la figura de la dreta.

Arribem a la mateixa conclusió sobre la suma de les àrees dels triangles acolorits i la dels triangles no acolorits.

10. Solució: 6.

Pel nombre D que passa del problema anterior, una qüestió suplementària a una pregunta encertada es valora amb 3 punts.

Com que $6 \cdot 3 - 17 = 1$ això ens pot fer adonar que una manera que l'Anna tingui un punt més que en Biel és que ella hagi encertat 6 preguntes suplementàries més que ell i en canvi ell una pregunta de 17 punts més que ella. Perquè l'Anna pugui haver respost bé 6 preguntes suplementàries més que en Biel com a mínim ha d'haver respost bé 6 preguntes de 17 punts. I pensant en aquest mínim, si l'Anna ha respost bé 6 preguntes de 17 punts i les corresponents suplementàries, i en Biel 7 de 17 punts i cap de les suplementàries, es compleix l'enunciat.

Algebraicament ens podem adonar que realment aquesta és la solució òptima.
Posem que s'ha de complir $17A + 3a = 17B + 3b + 1$ on cada lletra representa el que ja es pot imaginar. Ha de ser $a \leq A$ i per tant podem escriure $A = a+x$, i també $b \leq B$ i podem escriure $B = b+y$ amb $x, y \geq 0$. De l'equació anterior se'n dedueix $3(a-b) = 17(B-A)+1 = 17(b-a+y-x)+1$ i agrupant termes resulta $20(a-b) = 17(y-x)+1$. Aquesta igualtat, amb el valor possible més petit per $a-b$ (que també comportarà el valor mínim per a a i, doncs, també per a A) es compleix quan $a-b = 6$ i $y-x = 7$. Els valors mínims possibles per a a i A corresponen a $a = 6$, $b = 0$, $y = 7$, $x = 0$ que ens donen $A = 6$ i $B = 7$, que són els que ja havíem raonat anteriorment.

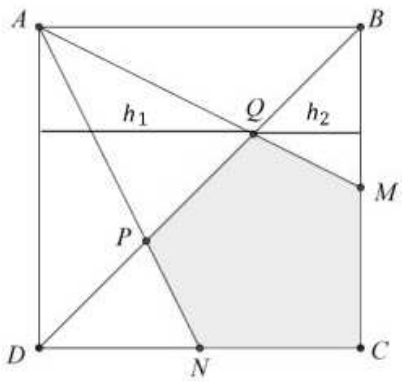
Problemes "de propina"

1. Solució: 9.

Si $8^m = 27$ podem escriure $2^{3m} = 27$ i equivalentment $(2^m)^3 = 27$, d'on resulta $2^m = \sqrt[3]{27} = 3$. Finalment, com que $4^m = (2^m)^2$ deduïm que $4^m = 3^2 = 9$.

---

2. Solució: $\dfrac{1}{3}$.



Restarem de l'àrea del quadrat les dels triangles ABD, MBQ i DNP.
L'àrea de ABD és $S_1 = \dfrac{S}{2}$ si S és l'àrea del quadrat.
Els triangles ADQ i MBQ són semblants. Com que $AD = 2BM$ la raó de semblança és 2. Aquesta també és la raó entre les altures; $h_1 = 2h_2$ a la figura.
Com que $h_1 + h_2 = c$, essent c el costat del quadrat, se'n dedueix que $h_2 = \dfrac{c}{3}$ i l'àrea del triangle triangle BMQ, igual a la del triangle DNP serà $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c}{2} \cdot \dfrac{c}{3} = \dfrac{S}{12}$.
Deduïm que l'àrea del pentàgon és $P = S - \dfrac{S}{2} - 2 \cdot \dfrac{S}{12} = \dfrac{S}{3}$.

---

3. Solució: 212.

Es va redactar l'enunciat amb una petita "pista" per a un camí de solució. Busquem el valor més petit de n perquè la fracció pròpia $\dfrac{m}{n}$ amb $m, n > 0$ i $n > m$ i unes altres es puguin simplificar totes. Podem escriure $n = m + a$ amb a un nombre enter positiu. Les fraccions de l'enunciat es poden escriure, aleshores, com $\dfrac{k}{k+a}$ amb $k \in m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$.

Què ha de succeir perquè una fracció tal com $\dfrac{k}{k+a}$ es pugui simplificar? Ha de ser que el màxim comú divisor $\text{mcd}(k, k+a)$ sigui diferent de 1 i per tant també ho serà $\text{mcd}(k, a)$.
Com que busquem que n sigui el més petit possible, també ho haurà de ser m. Prenem $m = 2$. Aleshores a ha de ser parell i la primera, la tercera i la cinquena fracció, éa a dir $\dfrac{2}{2+a}$, $\dfrac{4}{4+a}$ i $\dfrac{6}{6+a}$ es podran simplificar. Perquè es puguin simplificar les altres tres, $\dfrac{3}{3+a}$, $\dfrac{5}{5+a}$ i $\dfrac{7}{7+a}$ es dedueix que a ha de ser un múltiple de 3, de 5 i de 7. Com que el mcm(2,3,5,7) = 210, haurà de ser $a = 210$ i $n = 212$.