

Preguntes de 3 punts

1. La successió de lletres CDILMNOS (que estan escrites, com veieu, per ordre alfabètic) s'associa, **ordenadament**, amb una successió de xifres diferents, escrites en ordre creixent. Així, associem un nombre a cadascuna de les paraules DOS, MIL i CINC. Quin és el nombre més gran que pot ser, per aquest procediment, el resultat de l'operació

$$\text{DOS} \cdot \text{MIL} + \text{CINC}?$$

A) 253377 B) 488981 C) 649021 D) 847133 E) 20052005

2. La mare **Cangur** i el **Canguret** estan saltant al voltant d'un estadi de 330 m de perímetre. Tots dos fan un salt per segon. La mare salta 5 m cada vegada i el **Canguret**, 2 m. Comencen a saltar en el mateix punt i en la mateixa direcció. Després de 25 s el **Canguret** ja està cansat i es para, però la mare continua saltant en la mateixa direcció en què anava. Quant de temps trigarà la mare a atrapar el **Canguret**?

A) 24 s B) 51 s C) 56 s D) 60 s E) Més d'un minut.

3. La mestra va demanar a un al·lot que restés 3 d'un cert nombre i després dividís el resultat per 9. Però l'al·lot va restar 9 i després va dividir el resultat per 3. Si fent-ho així obtingué al final 43, quant hauria obtingut fent les operacions correctes?

A) 15 B) 34 C) 43 D) 51 E) 138

4. Per a quins dels valors de x que es donen a les opcions de resposta, l'expressió

$$\frac{x^2}{x^3}$$

pren un valor mínim?

A) -1 B) -2 C) -3 D) 1 E) 2

5. Quants nombres del conjunt $\{2, 3, 4, \dots, 2003, 2004, 2005\}$ són cubs perfectes?

A) 10 B) 11 C) 12 D) Més de 12 E) Menys de 10

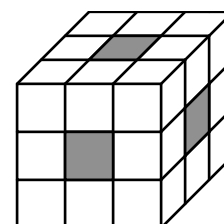
6. Una *progressió aritmètica* és una successió de nombres en què cada terme és igual a l'anterior més una quantitat constant, que rep el nom de *diferència* de la progressió.

En l'engraellat adjunt es poden omplir les caselles de manera que en cada fila d'esquerra a dreta, en cada columna de dalt a baix i en cada diagonal, de la casella superior a la casella inferior, es formin progressions aritmètiques (possiblement amb *diferències* diferents d'una progressió a una altra). Si ho fem així, quin nombre apareixerà a la casella assenyalada amb una x ?

				21
	16			
		27		
				x

A) 49 B) 42 C) 33 D) 28 E) 4

7. Un cub de dimensions $3 \times 3 \times 3$ pesa 810 g. En buidem tres fileres d' $1 \times 1 \times 3$, perpendicularment a les cares, tal com mostra la figura. Quin és el pes de la figura sòlida resultant?



A) 540 g B) 570 g C) 600 g D) 630 g E) 660 g

8. Si f és una funció tal que, per a tot valor enter de x es compleix que

$$f(x+1) = 2f(x) - 2002,$$

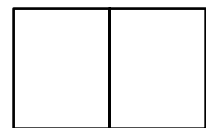
i, a més, sabem que $f(2005) = 2008$, llavors $f(2004)$ és:

- A) 2004 B) 2005 C) 2008 D) 2010 E) 2016

9. Dues botelles amb la mateixa capacitat esta plenes d'una dissolució d'àcid en aigua. Les raons del volum d'aigua respecte el volum d'àcid són, respectivament, 2:1 i 4:1. Aboquem el contingut d'aquestes dues botelles en una garrafa molt grossa. Quina serà la raó del volum d'aigua respecte del volum d'àcid en aquesta garrafa?

- A) 11:4 B) 3:1 C) 5:1 D) 6:1 E) 8:1

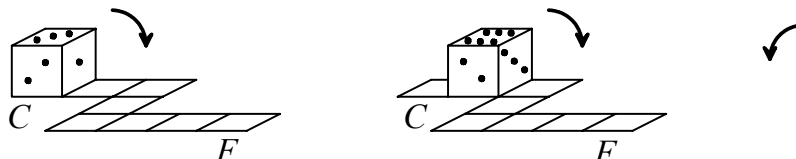
10. Si prenem dos fulls DIN A4 i els juxtaposem tal com es pot veure a la figura, obtenim un full DIN A3. En els fulls de la sèrie DIN, el quocient que resulta de dividir la mesura del costat gran per la del costat petit és sempre un nombre constant. Quin és aquest nombre?



- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 4/3 D) 3/2 E) 2

Preguntes de 4 punts

11. Un dau dels de jugar, amb la suma de punts de les cares oposades igual a 7, es fa lliscar com mostren les figures.



Al començament, és a dir, en el punt inicial (C), la cara superior és un 3. Quina serà la cara superior en el punt final del recorregut (punt F) ?

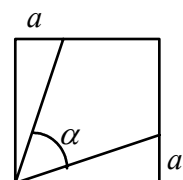
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. La Maria tira una moneda enlaire, i en Narcís, dues, i miren quantes cares han sortit. Quina és la probabilitat que el nombre de cares que surten a la Maria sigui igual que el nombre de cares que surten a en Narcís?

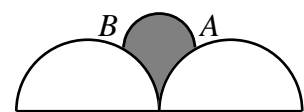
- A) 1/4 B) 3/8 C) 1/2 D) 2/3 E) 3/4

13. Si a és la tercera part del costat del quadrat, quant és $\cos \alpha$?

- A) 1/2 B) 3/5 C) 4/5 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

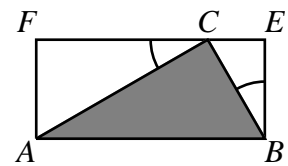


14. Tenim tres semicercles situats tal com mostra la figura. El diàmetre AB del semicercle superior és paral·lel als diàmetres dels dos semicercles inferiors. Si el radi d'aquests semicercles inferiors és de 2 cm i $AB = 2$ cm, quina és, en cm^2 , l'àrea de la regió ombrejada?



- A) $3\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi$ B) $\pi + \frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi$ D) $\pi + \frac{2}{3}$ E) $\pi + \sqrt{\frac{2}{3}}$

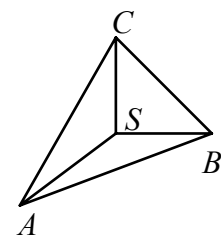
15. L'Helena pinta blanques o negres les cares d'una col·lecció de cubs de fusta, i en cada cub fa servir tots dos colors. Quants cubs pot aconseguir que tinguin repartits els colors de maneres diferents?
- A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64
16. Siguin a i b les longituds dels catets d'un triangle rectangle. Si d és el diàmetre del cercle inscrit al triangle i D el diàmetre del cercle circumscrit, llavors $d + D$ és igual a:
- A) $a + b$ B) $2(a + b)$ C) $\frac{1}{2}(a + b)$ D) \sqrt{ab} E) $\sqrt{a^2 + b^2}$
17. En una bossa hi ha 60 boles: n'hi ha que són vermelles, d'altres són blaves i d'altres blanques. Si totes les boles vermelles se substituïssin per boles blaves, hi hauria el doble de boles blaves que de boles blanques; però, en canvi, si totes les boles blanques es substituïssin per boles blaves, hi hauria el triple de boles blaves que de boles vermelles. Quin és el nombre de boles blaves que hi ha a la bossa?
- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30
18. Quants divisors enters positius de 4 xifres té el número 2005^2 ?
- A) Cap B) 1 C) 2 D) 3 E) Més de 3
19. La figura mostra un rectangle $ABEF$ i un triangle ABC . Sabem que l'angle $\angle ACF$ és igual que l'angle $\angle CBE$. Si $FC = 6$ cm i $CE = 2$ cm, quina és, en cm^2 , l'àrea del triangle ABC ?
- A) $8\sqrt{2}$ B) 12 C) $8\sqrt{3}$ D) 16 E) 24



20. Quin dels nombres següents pot ser expressat com el producte de quatre enters més grans que 1, tots diferents?
- A) 108 B) 124 C) 2005 D) 2025 E) 2187

Problemes de 5 punts

21. En una bossa tenim 17 boles numerades amb els nombres del conjunt $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$. Si seleccionem unes quantes boles de la bossa sense mirar-les, quin és el nombre mínim de boles que hem de treure per garantir que a la selecció hi hagi dues boles que sumin 18?
- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 17
22. En la piràmide $SABC$ tots els angles de les cares amb el vèrtex en el punt S són rectes. Les àrees de les cares laterals SAB , SAC i SBC són, respectivament, 3, 4 i 6. Calculeu el volum de la piràmide $SABC$.
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12



23. Si sabem que $\log_{10}(\sqrt{2005} + \sqrt{1995}) = n$, quant és $\log_{10}(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})$?

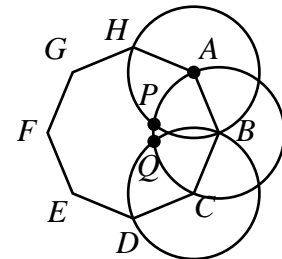
- A) $n - 1$ B) $1 - n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n + 1$ E) $-\frac{1}{n}$

24. A és un nombre enter que té exactament dos divisors. B és un nombre enter que té exactament cinc divisors. Quants divisors té el nombre $A \cdot B$?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 10
E) No és possible determinar-ho només amb la informació de l'enunciat.

25. En la figura adjunta, $ABCDEFGH$ és un octàgon regular de costat 1. Els punts P i Q són les interseccions de l'octàgon amb els cercles que tenen els centres en A , B i C i radi 1. Quina és la mesura en radians de l'angle $\angle APQ$?

- A) $\frac{19}{24}\pi$ B) $\frac{8}{11}\pi$ C) $\frac{5}{8}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) $\frac{7}{9}\pi$



26. L'Aina ha de viatjar des del punt A fins al punt B i té planejat d'anar a una determinada velocitat. Tanmateix, després s'adona que hauria d'arribar abans del que tenia previst i calcula que si circulés 5 km/h més de pressa arribaria 5 hores abans i, en canvi, si circulés 10 km/h més de pressa, llavors arribaria 8 hores abans. Quina era la velocitat que l'Aina havia planejat inicialment?

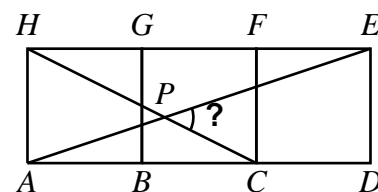
- A) 10 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 25 km/h
E) Depèn de la distància entre els punts A i B .

27. Definim una funció $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a partir de $f(0) = a$ i de la regla de recurrència $f(n+1) = 2 \cdot f(n) - 1$ per a qualsevol nombre enter, n . Si $f(99) = 2^{100} + 1$, quant és a ?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 9

28. La figura mostra tres quadrats iguals: $ABGH$, $BCFG$ i $CDEF$. Els segments AE i CH es tallen en el punt P . Quina és la mesura de l'angle CPE , assenyalat en la figura?

- A) 20° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 50°



29. Volem suprimir un i només un dels factorials del producte $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$, de manera que el resultat del producte restant sigui un quadrat perfecte. Quin factorial hem de suprimir?

- A) $13!$ B) $42!$ C) $47!$ D) $50!$
E) És impossible de fer el que es demana.

30. Quantes solucions reals té l'equació $2004^x = 2005x + 2006$?

- A) Cap B) 1 C) 2 D) Més de dues
E) No es pot saber sense una calculadora gràfica.